

Magyar Tudományos Akadémia

Veszprémi Akadémiai Bizottsága  
MONOGRÁFIÁI

VLAD

4





ASSZONYI CSABA DR.  
KAPOLYI LÁSZLÓ DR.

KÖZETEK  
MECHANIKAI  
JELLEMZŐINEK  
MEGHATÁROZÁSA



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
VESZPRÉMI AKADÉMIAI BIZOTTSÁGA  
MONOGRÁFIÁI

# KÖZETEK MECHANIKAI JELLEMZŐINEK MEGHATÁROZÁSA

DR. ASSZONYI CSABA  
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

DR. KAPOLYI LÁSZLÓ  
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

II. ÉVFOLYAM

4. SZÁM

---

VESZPRÉM

1976.



## MŰSZAKI SZAKBIZOTTSÁG KÖZLEMÉNYE

### SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG

DR. SZÁNTÓ ANDRÁS elnök, DR. BAKÁTS TIBOR  
DR. GYENIS JÁNOS, ÉRI ISTVÁN, DR. KÁRPÁTI ISTVÁN  
DR. KERÉNYI ERVIN, DR. MAJER ANTAL, DR. NYÉKI JENŐ,  
DR. PACZOLAY GYULA, DR. SALÁNKI JÁNOS,  
DR. SZÖNYI JENŐ, KOVÁCS ISTVÁN techn. szerkesztő

### LEKTORÁLTA

DR. NEMECZ ERNŐ  
akadémikus

DR. RICHTER RICHÁRD  
tanszékvezető egyetemi tanár

© Dr. Asszonyi Csaba, Dr. Kapolyi László, 1976

A KIADÁSÉRT FELELŐS: DR. BELÁK SÁNDOR A MAGYAR TUDOMÁNYOS  
AKADÉMIA VESZPRÉMI AKADÉMIAI BIZOTTSÁGA ELNÖKE. A KÖTET KÉ-  
SZÜLT IBM COMPOSER SZEDÉSSSEL, PRESS ROMAN BETŰKKEL A TATA-  
BÁNYAI SZÉNBAŰYÁK HÁZI SOKSZOROSITÓJÁBAN. FELELŐS VEZETŐ:  
ROZSNYÓI SÁNDOR. KÉZIRAT LEADVA: 1976. SZEPTEMBER HÓ 25-ÉN.  
IMPRIMÁLVA: 1976. OKTÓBER HÓ 28-ÁN. MEGJELENT: 1976. NOVEMBER  
HÓ 30-ÁN. IVTERJEDELEM 18 (A5). ÁBRÁK SZÁMA: 100. TÁBLÁZATOK  
SZÁMA: 7. ENGEDÉLYSZÁM: 1162/1976.

## ELŐSZÓ

A bányászat a földkéregben található hasznos ásványvagyon kinyerése céljából földalatti bányatérsegeket alakít ki, amelyek az ásványvagyon megfogásához és kitermeléséhez szükségesek. Ezzel megbontja a földkéregben uralkodó primér (vagy kvázi primér) állapotot, s olyan szekunder ill. terciér feszültségi és deformációs mezőt hoz létre, amely az üregnyitással létrehozott inhomogenitás megszüntetésére, az eredeti állapot visszaállítására, illetve azzal azonos valószínűségi állapot létrehozására törekszik. A természetnek az üregrendszer megszüntetésére irányuló akaratával szemben a bányász a földalatti üregek biztosítását állítja, ezzel kísérelve meg egy új, a bányamunka szempontjából szükséges – és lehetőleg biztonságos – nyugalmi vagy legalábbis kvázi-stacionér egyensúlyi helyzet létrehozatalát.

A bányászat a földkéreg legfelső – felszínhez közel eső – rétegeinek kimerülésével, egyre inkább a mélyebben fekvő telepek művelésére kényszerült, s ezáltal új szituáció jelentkezett. Ugyanis míg a felszínhez közeleső telepek lefejtéséhez kialakított bányatérsegekben a biztosító-szerkezetek alkalmasak voltak a megváltozott feszültségállapotból következő többletterhelések elviselésére, nagyobb mélységek esetén már nem található olyan biztosítási rendszer, amely a teljes terheléstöbbletet – a primer és terciér állapot közötti különbséget, az ún. alakváltozási feszültségeket – elviselni képes.

Ez a körülmény új közetmechanikai felismerésekhez vezetett, s olyan biztosítási megoldások kialakulását eredményezte, melyben a biztosító-szerkezetek a kőzetkörnyezettel *együttműködő* kettős rendszert alkotnak, s a kőzetkörnyezet a biztosítással közösen vállalják a többletterhelések elviselését. Ez a többlet már nem teljes egészében a biztosítást terheli, hanem jól tervezett biztosításrendszer esetében az együttműködő rendszer mindkét eleme – a kőzetköpeny is és a biztosítás is – saját teherviselőképességének arányában osztozik a többletterhelés egyensúlyozásában ill. felvételében.



A biztosítás tervezéséhez, a biztosítószerkezetek kialakításához, helyes beépítési technológiájuk kidolgozásához azonban szükségesek

- egyrészt a kőzetkörnyezet fizikai-mechanikai tulajdonságainak,
- másrészt a biztosítószerkezeti tulajdonságoknak, ill. a velük szemben támasztott követelményeknek az ismerete.

Jelen könyvünkben ezen kérdés-komplexum egyik elemével kívánunk csak foglalkozni, nevezetesen

- az in-situ uralkodó primer állapot jellemzőinek és
- a kőzetkörnyezet mechanikai tulajdonságainak meghatározásával.

Annak a környezetnek (a földkéreg bányászati célzattal igénybevett tartományának) az ismerete, ahol a kitermelési tevékenység folytatódik, az ott uralkodó nyomásállapot ismerete, a mechanikai behatásokkal szembeni viselkedés törvényszerűségeinek ismerete – elengedhetetlenül szükséges a bányabiztosítás és feltárási rendszer-kialakítás szempontjából.

A hatvanas évek elejétől folytatott kutatásaink – e területre vonatkozó – néhány fontosabb eredményét foglaltuk össze ebben a könyvben. A helyhiány miatt számos eredmény bemutatására nem volt módunk, ezért az érdeklődők figyelmét felhívjuk az Irodalomjegyzékben felsorolt tanulmányokra.

Könyvünkben a feszültségi és deformációs jellemzők laboratóriumi és in-situ meghatározásával foglalkozunk. A kérdés vizsgálatának nagyfokú aktualitást kölcsönöz, hogy kormányzatunk – a XI. Pártkongresszus állásfoglalása alapján – elhatározta az ország természeti erőforrásainak fokozottabb felhasználását, s ipari tevékenységünknek a lehetőségeknek megfelelően az olcsóbb és gazdaságosabb hazai ásványvagyonra alapozását.

A közeljövőben több szén-, bauxit és ércbánya telepítését, építését kezdjük meg, s ehhez kívánunk szerény adalékot szolgáltatni a természeti paraméterek meghatározásának bemutatásával.

Tatabánya, 1976. szeptember hó

A SZERZŐK



## TARTALOMJEGYZÉK

Előszó .....	5
Bevezetés .....	11

### 1. FEJEZET

A primér feszültségi állapot .....	13
1.1 A primér mező modellje .....	13
1.2 A primér feszültségeloszlás felírása .....	16
1.3 Egy speciális eset .....	19

### 2. FEJEZET

Az anyagtörvény meghatározása .....	21
2.1 Általános fizikai megfontolások .....	21
2.2 A feszültségtenzor általános alakja .....	26
2.3 A végtelen féltér anyagegyenlete .....	27
2.4 Izotróp kontinuumok anyagtörvénye .....	31
2.5 Jelölések .....	33
2.6 Az izotrópia és a közelítő feltevések .....	34
2.7 A standard modell .....	38
2.71 Egytengelyű feszültségállapot .....	39
2.72 A standard test mechanikai modellje .....	40
2.73 Fizikai egyenlet a feszültségi és deformációs tenzorral ..	42
2.74 A standard modell tulajdonságai .....	44
2.8 A rugalmasságtani vizsgálatok felhasználása a közetmechaniká- ban .....	49

### 3. FEJEZET

A közetállandók laboratóriumi meghatározása kúszásvizsgálattal ..	55
3.1 Bevezető megjegyzések .....	55
3.2 Egytengelyű nyomókísérletek .....	56
3.3 A kísérleti berendezés .....	61

3.4 A kiértékelés .....	67
3.5 Néhány kísérlet bemutatása .....	68

#### 4. FEJEZET

<b>Laboratóriumi egytengelyű nyomókísérletek .....</b>	<b>83</b>
4.1 Előzetes megjegyzések .....	83
4.2 Homogén–lineáris állapotegyenletű közegek .....	84
4.3 Egytengelyű nyomókísérletek .....	84
4.4 A kísérletek megvalósítása .....	87
4.41 Arányos terhelési próba .....	87
4.42 Kúszási próba .....	88
4.43 Relaxációs próba .....	88
4.5 Anyagegyenlet meghatározása .....	89
4.6 Az anyagállandók közvetlen meghatározása .....	93
4.61 Arányos terhelési próba .....	93
4.62 Kúszási próba .....	97
4.63 Relaxációs próba .....	98
4.7 Egy egyszerű kísérleti program .....	98

#### 5. FEJEZET

<b>Kőzetállandók laboratóriumi meghatározása relaxációs vizsgálattal</b> .....	<b>105</b>
5.1 Bevezető megjegyzések .....	105
5.2 Kísérleti berendezés leírása .....	106
5.3 A mérés leírása .....	110
5.4 A kiértékelés .....	113
5.41 Direkt módszer .....	113
5.42 Javított módszer .....	115
5.43 Sztochasztikus módszer .....	117
5.5 Megjegyzések .....	118
5.6 Néhány laboratóriumi kísérlet .....	118

#### 6. FEJEZET

<b>Laboratóriumi triaxiális nyomókísérletek .....</b>	<b>127</b>
6.1 Előzetes megjegyzések .....	127
6.2 A törés .....	128
6.3 A triaxiális vizsgálat .....	129
6.4 A triaxiális készülék .....	133



6.5 A mérés .....	136
6.6 A törési vizsgálat kiértékelése .....	139
6.7 A mérési eredményeket befolyásoló tényezők .....	150

## 7. FEJEZET

<b>Körszelvényű üreg körüli mechanikai állapot .....</b>	<b>155</b>
7.1 Előzetes megjegyzések .....	155
7.2 A szekunder mező modellje .....	156
7.3 A szekunder állapot meghatározása .....	156

## 8. FEJEZET

<b>A primér feszültségek és közetjellemzők in-situ meghatározása ...</b>	<b>161</b>
8.1 Az in-situ mérések elve .....	161
8.2 A térbeli állapot előállítása .....	162
8.3 Előzetes megjegyzések .....	163
8.4 A paraméterek egyszerű meghatározása .....	164
8.5 A paraméterek statisztikus meghatározása .....	173
8.6 Numerikus példák .....	180
 Irodalom .....	 189
Összefoglalás .....	191





## BEVEZETÉS

A bányászat költségtételei között a biztosítószerkezetek közismerten jelentős szerepet játszanak, ezért keresni kell a módot a biztosító anyagokkal való tervszerűbb, jobb gazdálkodásra. Ennek alapfeltétele, hogy a bányákban lévő kőzetmechanikai és nyomásviszonyokat megismerjük annyira, hogy a biztosítósígyénység tervezhető legyen.

A kőzetköpeny mechanikai anyagi jellemzőinek és feszültségállapotának ismerete azonban ezen túlmenően új biztosítási módok és eszközök kialakítását is eredményezheti, amelyeknél már a biztosítás az a gazdaságos elem – a kőzet-biztosítás kettős rendszerében –, amely úgy alakítja az in-situ nyomásviszonyokat a lehetőségek határain belül, hogy az a bányászati termelés szempontjából a legkedvezőbb legyen. Olyan terhelési szintet hoz létre, amelyet a kőzet és a biztosítóberendezés együttesen már tönkremenetel nélkül el tud viselni, s ezen belül a biztosítás igénybevétele tervezett, s olyan szintű, amelyet egyszerű és (élet-tartamát is tekintve) olcsó biztosítóberendezésekkel megvalósíthatunk. Gondolunk itt vágatbiztosításoknál pl. a nyomásbetáplálásos acélíves biztosításokra, vagy a nagytermelékenységű – rugalmas héjszerkezeti tulajdonságokat mutató – löttbetonos falazatokra. Fejtésbiztosító szerkezeteknél pedig azokra a keretes, pajzsos vagy a kettő kombinációjából felépíthető hidraulikus biztosításokra, amelyek felépítési elvüknél fogva a kőzet és biztosítás kettős rendszerének automatikus zárt kör-láncú szabályozását valósítják meg úgy, hogy a biztosítás igénybevétele a tervezett túl ne lépje – a többletet a kőzet viselje –, illetve ha a kőzetkörnyezet szilárdsági tulajdonságai ezt nem teszik lehetővé, akkor bizonyos irányított konvergencia megengedésével (ill. a hidraulikus rendszerrel történő szabályozásával) a kőzetigénybevétel is a megengedett határ alatt maradjon. A biztosítóberendezés által képviselt és a kőzetköpenyeknek átadott reakciók nagysága, eloszlása pedig segítse a főtetekezési tevékenységet, és a kőzetkörnyezetben tárolt rugalmas energia elvezetési irányainak illetve részleges felemészteni módjainak szabályozásával olyan környezeti viszonyokat alakítson ki, amelyek a biztonságos munkavégzést segítik (pl. a homokkidőlést meggátolják). Sokkal



egyszerűbb és gazdaságosabb a homlokkidőlés ellen a kőzetköpeny nyomásviszonyainak szabályozásával védekezni, mint külön erre a célra felszerelt – a fejtési munkát nehezítő – mechanikai berendezésekkel.

A könyv mindezen célkitűzések megvalósításához a természeti környezet anyagi-mechanikai tulajdonságainak, feszültségviszonyainak meghatározási módszereivel kíván segítséget nyújtani.

Az *első fejezet* a primér állapotot tárgyalja, s bemutatja, hogy ez általában térbeli, háromtengelyű általános orientáltságú.

A *második fejezet* foglalkozik a kőzetek anyagtörvényével, általános és specifikus anyagtulajdonságaival. Bizonyítja, hogy a kőzettulajdonságok visszaadására a legáltalánosabb homogénlineáris reológiai test, a standard modell – munkahipotézisként kiválóan alkalmas.

A következő három fejezet az anyagállandók egytengelyű laboratóriumi meghatározásával foglalkozik, bemutatva a kísérlethez felhasznált berendezéseket, a mérések elvét és lefolyását, a kiértékelés módját.

A *harmadik fejezet* a kőzetkarakterek kúszásvizsgálattal, az *ötödik fejezet* pedig a relaxációs próbával történő meghatározását ismerteti. A *negyedik fejezetben* a kettő kombinációja található, s az ún. aszimptotikus kőzettulajdonságok bemutatása látható.

A *hatodik fejezet* foglalkozik a laboratóriumi triaxiális kísérletekkel, s a törés bekövetkezésével.

A kőzetjellemzők in-situ értékének meghatározását fúrólukokban eszközölt tangenciális nyúlásmérésekre és radiális elmozdulásmérésekre alapozzuk.

A *hetedik fejezet* ennek megfelelően a fúróluk körül kialakuló feszültségi-, elmozdulási és deformációs mező alapösszefüggéseit ismerteti.

Végül a *nyolcadik fejezet* foglalkozik az in-situ mérésekkel. Ennek legegyszerűbb esetét mutatja csak be, mivel ennek alapján a legáltalánosabb vizsgálatok is elvégezhetők. Az általános kiértékelést illetően az irodalomjegyzékben [14] alatt feltüntetett disszertációra utalunk.



## 1. FEJEZET A PRIMÉR FESZÜLTSEGI ÁLLAPOT

### 1.1 A primér mező modellje

Anyagi önsúlyos féltér egyensúlyi állapotát kifejező differenciálegyenletből következik, hogy ha a szintes irányban változatlanságot tételezünk fel, akkor a féltér függőleges, ( $x$ ) normálisú felületelemeinek primér feszültségállapotát

$$p = \gamma x$$

egyenlőség fejezi ki. Egy teljesen „szabályos” esetben, ha a földkéreg egyenlő mélységben elhelyezkedő anyagi pontjai a szintes irányban mozgást nem szenvedtek és az önsúlyos kéreg mechanikai viselkedését a *Hooke*-törvénnyel leírhatónak tartjuk, akkor  $\epsilon_{\text{vizszintes}} = 0$  feltételből az anyagi féltér szintes normálisú feszültségelemeinek primér feszültségét

$$p_z = p_y = \frac{\gamma}{m-1} x$$

formában adjuk meg, ahol  $m$  a *Poisson*-féle szám,  $2 \sim \infty$  értéktartományban. Megállapíthatjuk, hogy a szabályos esetekben jelentkező feszültségállapot egy *in-situ* mérendő adaton ( $x$ ) kívül laboratóriumban meghatározható anyagjellemzők ( $\gamma$  és  $m$ ) függvénye, továbbá fennáll az a megállapítás, hogy  $p_z \leq p_x$ , és a primér feszültségek nyomófeszültségek.

A földkéreg ezen szabályos állapotával szemben sok esetben a vízszintes irányú változatlanság nem áll fenn. Üledékek keletkezése során pl. a vízmozgások főirányai szerint fajsúly- és anyagminőség-változással kell számolnunk. Ez a változás módosítja a szintes síkokon jelentkező egyenletes önsúlyelosztást, megszünteti a szintes sík fő feszültségi felület jellegét, lehetővé tesz a tömörödés során szintes irányú mozgásokat és így a szintes irányokban helyi rövidülések, illetve nyúlások fellépésének lehetőségeit teremti meg,  $\epsilon_{\text{vizszintes}} \neq 0$  következtében a szintes feszültségek nem fejezhetők ki a *Poisson*-szám függvényében.

A földkéreg feszültségállapotát a legintenzívebben geológiai erőhatások zavarják meg. Ezek hatásai szemmel látható rétegdeformációkban, kőzetanyag tönkremenetelben is jelentkezhetnek és ezek a primér feszültség-



állapotban a szabályos esettel nem közelíthető változást okoznak.

A kőzetmechanikai irodalomban az elmúlt 5-10 évig elfogadott volt az a feltevés, hogy a primér feszültségeket függőleges, vízszintes orientált-ságúaknak tekintették

$$p_1 = p_x = x\gamma \quad \text{és} \quad p_2 = p_3 = p_y = p_z = \frac{x\gamma}{m-1}$$

formában.

Később a valóság adekvátabb reprezentálására – a geológiai erők jelenlétének figyelembevétele céljából – az  $m$  Poisson szám helyett az egyenletben a  $k$  ún. kvázi-Poisson féle számot szerepeltették:

$$p_2 = p_3 = \frac{p_1}{k-1},$$

amelyben az  $m$  és a geológiai erők hatását a  $k$  tartalmazza. Ilymódon a  $k$  nem egy ismert állandó, hanem többek között a földkéreg anyagától és a hegyszerkezeti hatásoktól függő szám, amelynek értéke medenceként – sőt azon belül is – valamint a mélységtől függően más és más, így meghatározása csak *in-situ* mérésekkel lehetséges.

A fejlődés további iránya az volt, hogy a primér főfeszültségeket már többé nem tekintették függőleges és vízszintes irányúaknak, azonban még ezek a tanulmányok is mind *sík-alakváltozási* állapotot tételeztek fel.

Mind az első – függőleges és vízszintes irányú főfeszültségek – mind a második – síkalakváltozási állapot – megfogalmazás jogosságát semmi sem indokolja, s csupán közelítéseknek foghatók fel, ugyanis a különböző szinteken és mezőkben végzett *in-situ* mérések is igazolták, hogy a primér feszültségek irányai és nagyságai a természeti (mikro és makrotektonikai, geológiai) adottságoktól függően nagy mértékben változtak, s így a síkalakváltozási állapot feltételezése sem indokolt. Erre a feltételezésre az eddigiekben mindig azért volt szükség, mert erre az esetre vonatkozó feszültségeloszlási összefüggések az irodalomból ismertek, s így azok alapján *in-situ* mérési módszerek kialakításának meg volt a lehetősége.

Az eddig elmondottakból is kiderül azonban, hogy általában csak annyit van jogunk feltételezni, hogy a végtelen féltér egy tetszőleges pontjában *általános, háromtengelyű* (térbeli) feszültségeloszlás uralkodik, amelynek nagysága és irányjellemzői szintről-szintre változnak, s a külszínen – az  $x = 0$  helyen – értékük zérus.

Ezen általános feltételezés szerint a végtelen féltér egy adott részében uralkodó primér feszültségeloszlás ez alapján nem tervezhető, hanem csupán bizonyos távolságokra kijelölt pontokban eszközölt mérésekkel, statisztikus jelleggel határozható meg. Az igazság kedvéért hozzá kell azt is tenni, hogy ez a hiányosság az eddigi elméleteknél is megtalálható, u-



gyanis a „közetnyomás” a mélységgel lineáris arányban történő változásának feltételezése is csak közelítés.

$p_1$ ,  $p_2$  és  $p_3$ -mal jelölve a tér egy tetszőleges  $x$ ,  $y$  és  $z$  koordinátájú pontjában a főfeszültségeket és  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ -mal a főirányokat, az általános háromtengelyű feszültségeloszlást az alábbiak szerint írhatjuk le:

$$p_1 = p_1(x, y, z)$$

$$p_2 = p_2(x, y, z) = a(x, y, z) p_1(x, y, z)$$

$$p_3 = p_3(x, y, z) = b(x, y, z) p_1(x, y, z)$$

$$e_1 = e_1(x, y, z)$$

$$e_2 = e_2(x, y, z)$$

$$e_3 = e_3(x, y, z)$$

ahol  $x = 0$  helyen

$$p_1(0, y, z) = 0$$

$$p_2(0, y, z) = 0$$

$$p_3(0, y, z) = 0$$

az *in-situ* adottságok bonyolultsága és sokrétűsége, valamint feltételezett sztochasztikus jellege miatt a feszültségállapot eloszlása is szükségszerűen statisztikus rendszerű. Ezért a féltér feszültségeloszlása sohasem *egzakt* törvénnyel, hanem statisztikus valószínűségi mérőszámokkal jellemezhető. Vagyis a végtelen féltér egy adott pontjában a

$$\begin{array}{lll} p_1 = p_1 e_1 & p_1 = p_1(\mathbf{r}) = p_1(x, y, z), & e_1 = e_1(\mathbf{r}) = e_1(x, y, z), \\ p_2 = p_2 e_2 & p_2 = p_2(\mathbf{r}) = p_2(x, y, z), & e_2 = e_2(\mathbf{r}) = e_2(x, y, z), \\ p_3 = p_3 e_3 & p_3 = p_3(\mathbf{r}) = p_3(x, y, z), & e_3 = e_3(\mathbf{r}) = e_3(x, y, z), \end{array}$$

feszültségvektorok uralkodnak, amelyek egy olyan tenzormezőt alkotnak, amelyek az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordináták függvényében változnak.

A konvencionális felfogásban a  $p_1$  főfeszültség iránya állandó: függőleges, nagysága pedig a mélység függvényében monoton (sőt lineárisan) növekvő.

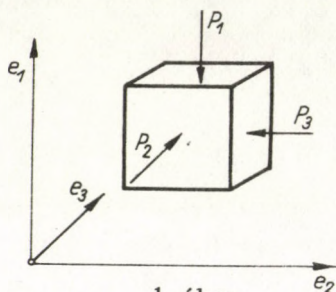
A geológiai adottságok azonban a végtelen anyagi féltér feszültségeloszlását oly mértékben módosítják, hogy a  $p_1$ ,  $p_2$  és  $p_3$  vektorfüggvények általában nem folytonos és nem monoton függvényei az  $x$ ,  $y$  és  $z$  koordinátáknak. Ebből természetszerűen következik, hogy a végtelen féltér primér feszültségeloszlásának megismerése a féltér diszkrét pont-



jaiban eszközölt *in-situ* mérésekkel lehetséges.

## 1.2 A primér feszültségeloszlás felírása

Mivel a földkéregben *in-situ* uralkodó feszültségeloszlás a geológiai erők jelenléte és a makrotektonikai adottságok miatt általános, térbeli, háromtengelyű feszültségeloszlásnak tekinthető, ez azt jelenti, hogy a térben létezik három olyan egymásra páronként merőleges irány, amelyek által – mint normálisok által – meghatározott síkokban csuszátó feszültségek nem ébrednek, viszont a normálfeszültségek mind zérustól, mind egymástól általában különböznek (1. ábra).

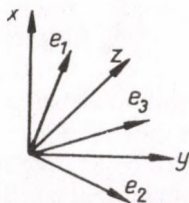


1. ábra

Ebben a  $e_1, e_2, e_3$  ortogonális egységvektorokkal jellemzett koordinátarendszerben a feszültségállapot a

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix} = \mathbf{F}_p \langle 1, 2, 3 \rangle$$

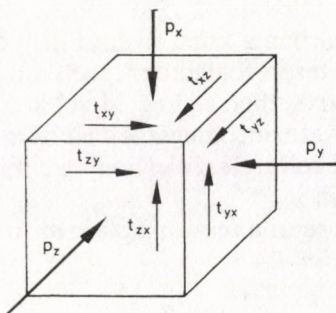
feszültségtenzorral jellemezhető. Egy tetszőleges  $x, y, z$  koordinátarendszerben, amelynek tengelyei az  $\langle 1, 2, 3 \rangle$  koordinátarendszerhez képest általános helyzetben vannak (2. ábra), a feszültségek tenzora a követke -



2. ábra

zõ alakot ölti (3. ábra):

$$\mathbf{F}_p(x, y, z) = \begin{vmatrix} p_x(x, y, z) & t_{yx}(x, y, z) & t_{zx}(x, y, z) \\ t_{xy}(x, y, z) & p_y(x, y, z) & t_{zy}(x, y, z) \\ t_{xz}(x, y, z) & t_{yz}(x, y, z) & p_z(x, y, z) \end{vmatrix}$$



3. ábra

A koordinátarendszert kijelölõ egységvektorokat jelöljük  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ -val (2. ábra), s ezek komponensei az  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  rendszerben írhatók fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \begin{vmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \mathbf{i} \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{k} \end{vmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &= \begin{vmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 \mathbf{i} \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{k} \end{vmatrix} \\ \mathbf{e}_3 &= \begin{vmatrix} e_{3x} \\ e_{3y} \\ e_{3z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 \mathbf{i} \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$



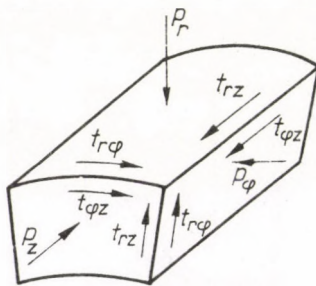
s így a feszültségtenzor az alábbi:

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z \\ iF_i & iF_j & iF_k \\ jF_i & jF_j & jF_k \\ kF_i & kF_j & kF_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_i & F_j & F_k \end{vmatrix} = \mathbf{F} < x, y, z >.$$

Mivel a továbbiakban a körszelvényű folyosók körüli feszültségeloszlással kívánunk részletesen foglalkozni, célszerű a primér feszültségeket hengerkoordinátarendszerben felírni. Mivel az  $x, y, z$  rendszerre vonatkozóan semmiféle irány szerinti megszorítást nem alkalmazunk, az általánosítás megsértése nélkül feltételezzük, hogy a  $z$  irány a körszelvényű folyosó tengelyirányát jelöli ki.

Ebben a rendszerben a feszültségtenzor mátrixa (4. ábra)

$$\mathbf{F}_p = \begin{vmatrix} p_r & t_{\varphi r} & t_{zr} \\ t_{r\varphi} & p_\varphi & t_{z\varphi} \\ t_{rz} & t_{\varphi z} & p_z \end{vmatrix} = \mathbf{F}_p < r, \varphi, z >$$



4. ábra

A koordinátarendszer ortogonális egységvektorait jelöljük  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$ -val, s ezek a vektorok  $(x, y, z)$  rendszerben a következőképp írhatók fel:

$$\mathbf{e}_r = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}.$$

s ekkor a feszültségtenzor az

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r \mathbf{F} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi \mathbf{F} \mathbf{e}_r & \mathbf{k} \mathbf{F} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_r \mathbf{F} \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_\varphi \mathbf{F} \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{k} \mathbf{F} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_r \mathbf{F} \mathbf{k} & \mathbf{e}_\varphi \mathbf{F} \mathbf{k} & \mathbf{k} \mathbf{F} \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

mátrixszal jellemezhető, amely komponenseként kiírva a következő:

$$p_r = \frac{1}{2}(p_x + p_y) + \frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2}(p_x + p_y) - \frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi - t_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$t_{r\varphi} = -\frac{1}{2}(p_x - p_y) \sin 2\varphi + t_{xy} \cos 2\varphi,$$

$$t_{\varphi z} = t_{yz} \cos \varphi - t_{zx} \sin \varphi,$$

$$t_{zr} = t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi.$$

### 1.3 Egy speciális eset

Könyvünkben később tárgyalásra kerülő *in-situ* mérések kiértékelését nagymértékben leegyszerűsíti, ha feltételezzük, hogy a fúróluk tengelyiránya valamelyik főiránnyal egybeesik. Ez az általánosság erős leszűkítést jelent, de megengedhetőnek tartjuk, ui. az általános megoldás is

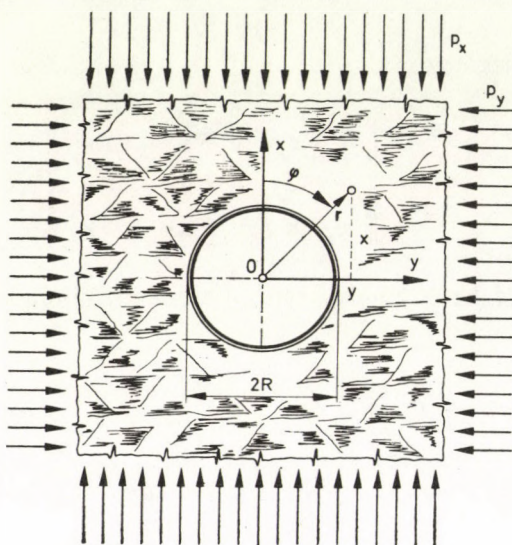


bemutatásra kerül.

Igy pl a 8. fejezetbeni vizsgálatoknál a primér mezőt

$$p_1 = p_x = p \qquad p_2 = p_y = q = \frac{p}{k-1}$$

alakúnak tekintjük (5. ábra), ahol  $k$  az említett kvázi-Poisson féle szám.



5. ábra

Polárkoordinátarendszerben a primér feszültségeloszlás az alábbi összefüggésekkel írható fel:

$$p_r = \frac{1}{2} (p + q) + \frac{1}{2} (p - q) \cos 2\varphi = \frac{1}{2} p \frac{k}{k-1} + \frac{k-2}{k-1} \cos 2\varphi,$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2} (p + q) - \frac{1}{2} (p - q) \cos 2\varphi = \frac{1}{2} p \frac{k}{k-1} - \frac{k-2}{k-1} \cos 2\varphi,$$

$$t_{r\varphi} = -\frac{1}{2} (p - q) \sin 2\varphi = -\frac{1}{2} p \frac{k-2}{k-1} \sin 2\varphi,$$

ahol  $\varphi$  szöget az  $x$  tengelytől az óramutató járásával megegyező irányban értelmezzük.



## 2. FEJEZET AZ ANYAGTÖRVÉNY MEGHATÁROZÁSA

A kőzetköpenyben létesített bányatérsegek állékonysága, a biztosításra ható terhelés az eredeti primér feszültségállapot mellett, nagymértékben függ a kőzetkörnyezet anyagi tulajdonságaitól, nevezetesen, hogy adott feszültségváltozásra a kőzet milyen jellegű és mértékű mozgásokkal illetve deformációval reagál. A kőzet *anyagegyenlete* alatt tehát azt a fizikai összefüggést értjük, amely a feszültségek és a hatásukra létrejövő deformációk közötti kapcsolatot írja le.

### 2.1 Általános fizikai megfontolások

A hagyományos elmélet feltételezi, hogy a feszültségtenzor a deformációs tenzortól és kifejezetten csakis a deformációs tenzortól függ:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{D})$$

amelyből általában első közelítésként a  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ -hoz tartozó  $\mathbf{F}$ -et zérusnak véve:

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{D}} \right)_0 \mathbf{D}$$

azaz

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \left( \frac{\partial f_{xx}}{\partial \varepsilon_x} \right)_0 \varepsilon_x + \left( \frac{\partial f_{xx}}{\partial \varepsilon_y} \right)_0 \varepsilon_y + \left( \frac{\partial f_{xx}}{\partial \varepsilon_z} \right)_0 \varepsilon_z + \\ & + \left( \frac{\partial f_{xx}}{\partial \gamma_{xy}} \right)_0 \gamma_{xy} + \left( \frac{\partial f_{xx}}{\partial \gamma_{yz}} \right)_0 \gamma_{yz} + \left( \frac{\partial f_{xx}}{\partial \gamma_{zx}} \right)_0 \gamma_{zx}; \\ \sigma_y = & \left( \frac{\partial f_{yy}}{\partial \varepsilon_x} \right)_0 \varepsilon_x + \left( \frac{\partial f_{yy}}{\partial \varepsilon_y} \right)_0 \varepsilon_y + \left( \frac{\partial f_{yy}}{\partial \varepsilon_z} \right)_0 \varepsilon_z + \\ & + \left( \frac{\partial f_{yy}}{\partial \gamma_{xy}} \right)_0 \gamma_{xy} + \left( \frac{\partial f_{yy}}{\partial \gamma_{yz}} \right)_0 \gamma_{yz} + \left( \frac{\partial f_{yy}}{\partial \gamma_{zx}} \right)_0 \gamma_{zx}; \\ & \dots \dots \dots \\ \tau_{yz} = & \left( \frac{\partial f_{yz}}{\partial \varepsilon_x} \right)_0 \varepsilon_x + \left( \frac{\partial f_{yz}}{\partial \varepsilon_y} \right)_0 \varepsilon_y + \left( \frac{\partial f_{yz}}{\partial \varepsilon_z} \right)_0 \varepsilon_z + \\ & + \left( \frac{\partial f_{yz}}{\partial \gamma_{xy}} \right)_0 \gamma_{xy} + \left( \frac{\partial f_{yz}}{\partial \gamma_{yz}} \right)_0 \gamma_{yz} + \left( \frac{\partial f_{yz}}{\partial \gamma_{zx}} \right)_0 \gamma_{zx}; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$



Az  $F$  hat különböző komponens-egyenletének mindegyikében hat – hat, tehát összesen 36 állandó szerepel. Ha feltételezzük, hogy a deformációs munka *potenciális* (létezik közelítő érvényű rugalmas potenciál), amiből a  $6 \times 6$ -os mátrix szimmetrikus volta következik, akkor 21 független állandó marad. Ha az anyag izotróp, akkor az állandók száma 2-re, ha összenyomhatatlan (inkompresszibilis), akkor 1-re csökken.

Jellegzetessége a hagyományos elméletnek, hogy általában feltételezi az anyagegyenletben szereplő együtthatók állandó voltát, a feszültség-tenzorra vonatkozóan megbízható fizikai támpontot nem tud adni, egy ismeretlen függvény deformáció szerinti sorfejtésével közelít, még azt sem tudva (legfeljebb sejtve), vajon a deformációk tenzora határozza-e meg a feszültségtenzort és egyértelmű-e ez a kapcsolat.

A következőkben bemutatott vizsgálat célja, azoknak az általános törvényszerűségeknek a felírása, amelyekből a feszültségtenzor minden általános érvényű jellegzetessége meghatározható.

A mechanika hagyományos felfogása ilyen általános törvényt nem ismer, csupán annyit mond, hogy a feszültségtenzor a deformáció tenzorának függvénye.

Arra, hogy léteznek ilyen általános törvények, *Fényes Imre* mutatott rá, aki az *Onsager*-féle „fenomenologikus reláció” – vagy más néven: vezetési törvény – és a *Curie*-elv általánosításaként olyan együttes összefüggést vezetett le, amely tetszőleges fizikai rendszerre – így tehát a mechanikaira vonatkozóan is – általános érvényű. Ennek alkalmazása előtt azonban néhány fogalmat kell bevezetnünk.

Egyik ilyen fogalom az *extenzív* mennyiség fogalma. Azokat a fizikai mennyiségeket, amelyek mértékjellegűek és additíve tevődnek össze, nevezzük extenzíveknek. Ilyenek pl. a térfogat, a tömeg, az impulzus stb. Ugyanis egy tartományon belül a térfogat, a tömeg a résztartományokban felvett érték egyszerű összegeként állítható elő és értéke a tartomány méreteinek növekedésével nő.

Egy adott mechanikai rendszer állapota egyértelműen jellemezhető az extenzív mennyiségek térbeli eloszlásával, a dinamikai folyamatok, illetve sztatikai egyensúlyok pedig az extenzív mennyiségek mérlegegyenleteivel.

Az extenzív mennyiségek mellett azonban megkülönböztetünk ún. *intenzív* mennyiségeket is, helyesebben a fizikai mennyiségeket extenzívekre és intenzívekre osztjuk. Ez önmagában csupán haszontalan csoportosítás lenne, ha a feszültségállapotra gyakorolt hatásuk nem tenné lehetővé pl. a feszültségtenzor általános alakjának meghatározását.

Az *intenzív* mennyiségeket lokális mennyiségeknek is nevezhetjük, ui. ezek a kiterjedéstől függetlenek (pl. a test hőmérséklete), míg az extenzív mennyiségek (pl. tömeg, energia) függnek a tartomány térfogatától.



Jelöljük a mechanikai változást meghatározó extenzív mennyiségeket  $x_1, x_2, \dots, x_n$ -nel. A mechanikai rendszer energiája mindig kifejezhető az extenzív állapotváltozók függvényeként:  $W = W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Az energia

$$dW = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n y_i dx_i \quad (1)$$

megváltozása nyilván úgy tekinthető, mint az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  extenzív mennyiségek megváltozásának következménye. (Az extenzív mennyiségek megváltozását viszont a mérlegegyenletek írják le.)

Ha a  $W$  energia az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mennyiségektől függ, akkor adott térrészből az energia csak az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mennyiségekkel együtt távozik, illetve léphet be. A  $W$  energiának valamely  $x_i$ -vel együtt történő be-, illetve kilépését speciális kölcsönhatás eredményeinek tekintjük és az  $x_i$ -t a kölcsönhatás *jellemző* (karakterisztikus) *extenzív* mennyiségének nevezzük. Bármely rendszer és környezete közötti energetikai kölcsönhatás tehát annyiféle lehet, ahányféle extenzív mennyiség energiát képes magával szállítani. Minden egyes energetikai kölcsönhatáshoz tartozik egy-egy karakterisztikus extenzív mennyiség az 1. táblázat szerint.

1. táblázat

Energetikai kölcsönhatás	A kölcsönhatásra jellemző extenzív mennyiség	A kölcsönhatással járó elemi energiacsere	Az energiaközlés neve
termikus	entrópia: $S$	$\frac{\partial W}{\partial S} dS$	hő
térfogati	térfogat: $V$	$\frac{\partial W}{\partial V} dV$	térfogatváltozási munka
mechanikai ált.	mechanikai impulzus: $p$	$\frac{\partial W}{\partial p} dp$	mechanikai munka

Adott típusú kölcsönhatás vagy sztatikus egyensúlyt, vagy állapotváltozást eredményez. Mi lehet az oka, hogy ha a test, illetve adott pontja és környezete közti energiacserét semmi sem akadályozza, akkor is hol sztatikus egyensúly áll fenn, hol pedig transzportfolyamat indul meg?

Minden egyes energetikai kölcsönhatáshoz a jellemző extenzív mennyiségen kívül egy jellemző *intenzív* mennyiség is tartozik. Ha két testben a megfelelő kölcsönhatáshoz tartozó intenzív mennyiségek értéke mege-



gyezik, ez pillanatnyi egyensúlyt eredményez. Ha a kölcsönhatást jellemző intenzív mennyiség a két testben, illetve a test vagy pl. az anyagi feltér adott pontjában és környezetében különbözik egymástól,

*olyan irányú konduktív áramlás jön létre, amely az inhomogenitást kiegyenlíteni igyekszik* (2)

Innen ered a természeti folyamatok (így a mechanikaiaké is) irreverzibilitása.

Ez az 1. táblázatban közölt energetikai kölcsönhatások esetében a következőket jelenti:

– Az entrópiához tartozó jellemző intenzív mennyiség a hőmérséklet. Az anyagi test két közeli pontjának egyikéből a másikába a belső energia konduktív módon áramlik az entrópiával együtt abból a pontból, ahol a hőmérséklet nagyobb, abba a pontba, ahol a hőmérséklet kisebb.

– A belső energia konduktív módon áramlik a nagyobb hidrosztatikai nyomású helyről a kisebb nyomású helyre. A táguló rendszer munkavégzése során energiát veszít, térfogatcsökkenés esetén pedig energiát vesz fel.

– A kinetikus energia jellemző intenzív mennyisége a *konvektív* áramlási sebesség. A kiegyenlítődéssel itt a belső súrlódást eredményezi. A nagyobb sebességgel áramló tömeg igyekszik magával ragadni a kisebb sebességű tömegrészeket, illetve a kisebb sebességű részek fékezni a nagyobb sebességűeket. Ha a világűrben – minden folyamatos külső hatástól elzárva – egy abszolút hajlékony falú tartályban vizet helyezünk el és annak egy adott helyen impulzust és vele együtt kinetikus energiát adunk át, a tartály tömegközéppontja az eredeti helyzetéhez képest egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez, a folyadék (illetve gáz) viszont a tömegközépponthoz viszonyítva bonyolult áramlást mutat. A kiegyenlítődéssel abban áll, hogy a folyadékrendszer minden pontja a tömegközéppont sebességét igyekszik felvenni: az egyensúly beálltával az egész rendszer merev testként mozog tovább, a tömegközépponthoz viszonyított egyensúly sztatikus.

– Ha egy szilárd testtel (impulzussal együttesen) kinetikus energiát közlünk, az impulzus bevezetésének helyéből kiindulva szintén konduktív impulzusáram és kinetikus energiaáram lép fel. A szilárd test, illetve az igen nagy belső súrlódású folyadék részecskéi azonban nem mozdulhatnak el szabadon, impulzusukat és energiájukat a szomszédos részecskéknak adják át. Ilyenkor az „áramlási sebesség” makroszkópikus szempontból elhanyagolható (az egyes részecskék elmozdulása igen kicsiny). A közvetlenül nehezen megfigyelhető konvektív áramlási sebesség helyett az *u* elmozdulás-vektor játssza az impulzushoz tartozó jellemző intenzív



mennyiség szerepét és a vezetékes impulzusáram olyan irányban folyik, hogy ezúttal az  $\mathbf{u}$  vektormező a homogenizálódás felé tart. (Bár lehet, hogy a teljes homogenizálódás mégsem tud bekövetkezni, mert a külső erőhatás folyamatos impulzusforrásként működik.)

Az energetikai kölcsönhatások jellemzéséhez annak ismerete is szükséges, hogy a kölcsönhatást jellemző mennyiség miként függ a hozzátartozó energiafajtától és a jellemző extenzív mennyiségtől.

Az (1) alatt felírtuk, hogy az energia teljes megváltoztatása:

$$dW = \sum_{i=1}^n y_i dx_i$$

Fontos törvény, hogy az  $x_i$  extenzív mennyiséghez tartozó intenzív mennyiség éppen a  $W$ -nek  $x_i$  szerinti differenciálhányadosa:

$$y_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mivel a  $W$  és az  $x_i$ -k is mértékjellegű mennyiségek, az (1)-ből *Euler* tétele alapján a

$$W = \sum_{i=1}^n y_i x_i \quad (3)$$

összefüggés vezethető le.

A (3) teljes differenciálja

$$dW = \sum_{i=1}^n y_i dx_i + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$$

amelyből az (1) figyelembevételével a *Gibbs–Duhem* relációt kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i dy_i &= 0 \\ dy_n &= - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_n} dy_i \\ \frac{\partial y_n}{\partial y_i} &= - \frac{x_i}{x_n} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (4)$$

A (4) azt fejezi ki, hogy bár az  $n$  számú extenzív állapothatározó egymástól független, a jellemző intenzív mennyiségek közül  $n-1$  számú már meghatározza az  $n$ -ediket. Ez szemléletesen is világos. Ha a jellemző intenzív mennyiségek mind függetlenek lennének egymástól, a test állapotát – köztük térbeli kiterjedését is – egyértelműen meghatároznák, ami nyilván lehetetlen, hiszen az intenzív mennyiségek a kiterjedéstől függetlenek.



## 2.2 A feszültségtenzor általános alakja

A mechanikai folyamatoknál – lásd a (2)-öt – a mechanikai változás olyan irányú, amely a jellemző *intenzív* mennyiség inhomogenitását megszüntetni igyekszik.

$$y_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}$$

jelölte az  $x_i$  extenzív mennyiséghez tartozó jellemző intenzív mennyiséget. *Onsager* Nobel-díjas (1931) fizikus vezetési törvényének (fenomenológikus relációjának) *Fényes* professzor szerinti általánosításával felírható, hogy az  $x_i$  extenzív mennyiség konduktív áramsűrűsége

$$j_i = \sum_{k=1}^{n=1} \Lambda_{ik} \nabla y_k \quad (5)$$

ahol  $\nabla$  az inhomogenitás operátora, így  $a \nabla y_k$  a  $k$ -adik intenzív mennyiség inhomogén értékeloszlását képviseli.

*Onsager* második törvénye szerint a  $\Lambda_{ik}$  vezetési mátrix szimmetrikus:

$$\Lambda_{ik} = \Lambda_{ki} \quad (6)$$

és a kvadratikus forma pozitív definit:

$$\sum_i \sum_k \Lambda_{ik} \xi_i \xi_k \geq 0 \quad (7)$$

(az egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha minden  $\xi_i = 0$ ).

Az általános mechanikai kölcsönhatások jellemző extenzív-intenzív mennyiségpárja a *mechanikai impulzus* és a *konvektív áramlási sebesség* ( $\mathbf{v}$ ). Az (5) összefüggésben szereplő kifejezések megfelelői a következők:  $j_i$ -nek az impulzus konduktív áramsűrűsége (a feszültség),  $a \nabla y_k$ -nak pedig a  $\mathbf{v}$  *sebesség derivált tenzora*. Mivel jelen esetben a  $j_i$  és  $\nabla y_k$  másodrendű tenzorok, így a  $\Lambda$  negyedrendű mátrix, vagyis az (5) mechanikai állapotváltozások esetén a feszültségtenzor általános összefüggését szolgáltatja:

$$\mathbf{F} = \Lambda \cdot (\nabla \circ \mathbf{v}) \quad (8)$$

amely kiírva a következő

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \Lambda_{xxxx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \Lambda_{xxyx} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \Lambda_{xxzx} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \\ & + \Lambda_{xxxy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \Lambda_{xxyy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \Lambda_{xxzy} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \\ & + \Lambda_{xxxz} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \Lambda_{xxyz} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \Lambda_{xxzz} \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{aligned} \quad (8a)$$



$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \Lambda_{xyxx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \Lambda_{xyyx} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \Lambda_{xyzx} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \\
& + \Lambda_{xyxy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \Lambda_{xyyy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \Lambda_{xyzx} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \\
& + \Lambda_{xyxz} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \Lambda_{xyyz} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \Lambda_{xyzx} \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned} \quad (8a)$$

Az anyagegyenletben szereplő együtthatók száma:  $3^4 = 81$ , ezek azonban még a legáltalánosabb esetben sem függetlenek egymástól. Sőt, még azt sem mondhatjuk róluk, hogy állandók, mert elvben a helynek, az időnek, a sebesség-komponenseknek, azok deriváltjainak, sőt még magasabbrendű deriváltjainak is függvényei lehetnek. Közelebbit a (8) kapcsolatairól csak valamely konkrét mechanikai rendszer speciális adottságainak ismeretében mondhatunk.

### 2.3 A végtelen féltér anyagegyenlete

A kontinuumok általános anyagegyenletének meghatározása után (8), amely folyadékokra, gázokra és szilárd testekre egyaránt érvényes, térjünk át a földkéregben lejátszódó ún. *sztatikus* deformációk vizsgálatára.

Az anyagi féltérben a konvektív áramlási sebesség olyan kicsiny, hogy gyakorlatilag megfigyelhetetlen. Így az  $\mathbf{F}$  feszültségtenzort meghatározó sebesség-komponens-deriváltak sem mérhetők közvetlenül. Az  $\mathbf{F}$  meghatározása érdekében a  $\mathbf{v}$  konvektív sebesség helyett olyan mennyiséget kell keresnünk, amely

- egyrészt a  $\mathbf{v}$ -t egyértelműen meghatározza,
- másrészt érzékenyen reagál a deformációt előidéző hatásokra.

Nézzünk meg egy ilyen – konvektív tömegáramlásra alig képes – rendszert (mint pl. a földkéreg bányászati céllal igénybe vett tartománya) és vegyük ennek egy kis térfogatát. A sebesség kicsiny volta miatt a kis tartomány anyagi szubsztanciája hosszú időn át együtt marad (nem szóródik szét, mint az áramló folyadékok és gázok részecskéi). A deformáció legfeljebb e kis tartományok kismértékű elcsúszásával, elforgatásával, térfogatának változásával és torzulásával jár. E különböző jellegű változásokat együttesen jellemezhetjük  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  elmozdulás-mezővel, amely a mechanikában megszokott jelzőszám. Az  $\mathbf{u}$  „nullpontját” úgy választjuk meg, hogy deformálatlan állapotban minden  $\mathbf{r}$  helyen azonos értékű, pl. zérus legyen. Az  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  explicit időbeli változása az adott helyen fennálló áramlással azonos értelmű, vagyis az áramlási sebességet egyértelműen meghatározza:



$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Ebből természetesen az is látható, hogy fordítva: a  $\mathbf{v}$  nem határozza meg az  $\mathbf{u}$ -t, vagyis az  $\mathbf{u}$  egy  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  eloszlású vektorrendszer erejéig határozatlan:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_0(\mathbf{r})]$$

Ez nem okoz bajt, mert deformálatlan állapotban  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \text{konstans}$ , illetőleg pl.  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$  feltételezéssel élünk.

Külön figyelemre méltó az az eset, amidőn az anyagi rendszer valamilyen külső tér hatására van sztatikus egyensúlyban. A földkéregnek a gravitációs erőter hatására történő deformációja ilyen esetnek tekinthető. Igaz ugyan, hogy a gravitációs hatás magának a tömegeloszlásnak a következménye és így „belső” erőként volna kezelendő. Viszont ez az erőhatás az egész Föld tömegéhez képest kis tömegű rendszerekben elhanyagolható és csupán a Föld többi – lényegesen nagyobb – részének gravitációs hatása (ami már a vizsgált térfogatrészre vonatkozóan külső hatás) jár fizikailag észlelhető hatással.

Az elmondottak alapján: ha az impulzus áram mellett a konvektív áram viszonylag kicsiny, akkor az impulzushoz rendelt jellemző intenzív mennyiség nem a  $\mathbf{v}$  sebesség, hanem az  $\mathbf{u}$  elmozdulásvektor. A konduktív impulzusáram sűrűségének ( $-\mathbf{F}$ ) inhomogenitását és az  $\mathbf{u}$  inhomogenitását, illetve esetleges anizotrópiáját jellemző

$$\nabla \circ \mathbf{u} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right\|$$

derivált tenzor kapcsolatát ezúttal is a Fényes által általánosított Onsager-féle fenomenologikus reláció alkalmazásával nyerjük a (8)-cal analóg formában:

$$\mathbf{F} = L \nabla \circ \mathbf{u} \quad (9)$$

ahol  $L$  negyedrendű ( $3^4 = 81$  komponensű) impulzusvezetési tenzor.

A (9) alatti anyagtörvény nem lineáris összefüggés – még kevésbé lineáris közelítés – hanem minden folytonos deformációra érvényes egzakt kapcsolat.



Az  $L$  impulzusvezetési tenzor komponensei között vannak összefüggések, amelyeket az elmélet kifejtésénél figyelembe kell vennünk. Ezek a következők:

1. A konduktív impulzusáram a feszültségállapot megszűnését igyekszik előidézni, amit az elmélet azon megállapítása juttat kifejezésre, hogy az  $L$  mátrix *pozitív* definit.

2. Az *Onsager*-féle második vezetési törvényből következik, hogy az  $L$  tenzor szimmetrikus:

$$L = L^T \quad (10)$$

3. Az impulzusmomentum megmaradási tétele a feszültségtenzor szimmetricitását kívánja meg:

$$F = F^T \quad (11)$$

amiből további szimmetria-feltételek vezethetők le az  $L$  tenzorra vonatkozóan. A (9)-nek a (11)-be történő helyettesítése útján, majd a (10) felhasználásával az

$$L\nabla \circ u = (L\nabla \circ u)^T = (\nabla \circ u)^T L^T = u \circ \nabla L^T = u \circ \nabla L \quad (12)$$

összefüggés írható fel.

A (10) és (11) szimmetriarelációk következményeként az  $L$  81 számú komponenséből legfeljebb 21 lehet egymástól független: a többi komponens vagy zérus, vagy kifejezhető a független 21-el. Ez a következő képp látható be.

A (8) alatt láttuk, hogy a feszültségtenzor egy tetszőleges komponense 9 impulzusvezetési együtthatóval írható fel, pl.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & L_{xyxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + L_{xyyx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + L_{xyzx} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \\ & + L_{xyxy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + L_{xyyy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + L_{xyzy} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \\ & + L_{xyxz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + L_{xyyz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + L_{xyzz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Innen következik, hogy a (11) feltétel:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

összesen  $3 \times 9 = 27$  összefüggést jelent, így marad  $81 - 27 = 54$  együttható, ami a 6, egymástól különböző feszültségkomponens összefüggéseiben sze-



repel ( $6 \times 9 = 54$ ). A (10) feltételből következik, hogy a 6 különböző feszültségkomponens kifejezésében a szimmetria folytán egyenként 3 elem megegyezik, tehát  $6 \times 3 = 18$ , vagyis  $54 - 18 = 36$  független együtttható marad. E 36 elem 6-6 indexpár  $6 \times 6$ -os mátrixaként rendezhető, ami a (10) szerint szimmetrikus. A szimmetria a 6 átlóselemre nem, a maradék 30 elemre 15 kikötést jelent, így a zérustól különböző együttthatók maximum lehetséges száma:  $36 - 15 = 21$ , ami tökéletesen anizotróp közegekre áll fenn.

Könnyen belátható, hogy a megszokott deformációs tenzorjelölés bevezetésével

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \circ \mathbf{u} + \mathbf{u} \circ \nabla] =$$

$$= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (13)$$

az anyagegyenlet általános formája

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} \mathbf{D} \quad (14)$$

illetve skalárisan kiírva

$$\begin{aligned} \sigma_x &= L_{11} \varepsilon_x + L_{12} \varepsilon_y + L_{13} \varepsilon_z + L_{14} \gamma_{xy} + L_{15} \gamma_{yz} + L_{16} \gamma_{zx} \\ \sigma_y &= L_{21} \varepsilon_x + L_{22} \varepsilon_y + L_{23} \varepsilon_z + L_{24} \gamma_{xy} + L_{25} \gamma_{yz} + L_{26} \gamma_{zx} \\ \sigma_z &= L_{31} \varepsilon_x + L_{32} \varepsilon_y + L_{33} \varepsilon_z + L_{34} \gamma_{xy} + L_{35} \gamma_{yz} + L_{36} \gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= L_{41} \varepsilon_x + L_{42} \varepsilon_y + L_{43} \varepsilon_z + L_{44} \gamma_{xy} + L_{45} \gamma_{yz} + L_{46} \gamma_{zx} \\ \tau_{yz} &= L_{51} \varepsilon_x + L_{52} \varepsilon_y + L_{53} \varepsilon_z + L_{54} \gamma_{xy} + L_{55} \gamma_{yz} + L_{56} \gamma_{zx} \\ \tau_{zx} &= L_{61} \varepsilon_x + L_{62} \varepsilon_y + L_{63} \varepsilon_z + L_{64} \gamma_{xy} + L_{65} \gamma_{yz} + L_{66} \gamma_{zx} \end{aligned} \quad (14a)$$

ahol  $L_{ij}$  az ún. impulzusvezetési együttthatók, amelyek általában nem konstánsok, hanem a mechanikai, sőt termodinamikai adatok függvényei. Tehát a (14a) legtöbbször *nem lineáris*.

A (13), illetve (14a) kifejezésekben szereplő  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{yz}$  jelölések esetünkben nem deformáció komponenseket jelölnek, még ha úgy is nevezzük őket, hanem csupán egyszerűsítő jelölések, amelyek kicsiny deformációk esetén jó közelítéssel a deformáció (nyúlás és szögtorzulás) mérőszámainak tekinthetők. A (14), (14a) *anyag törvény* azonban a nagy deformációk esetében is egzakt összefüggés.



## 2.4 Izotróp kontinuumok anyagtörvénye

A földkéreg bizonyos esetekben jó közelítéssel izotrópnek tekinthető, ezért meg kell vizsgálni, hogy az izotrópia maximálisan lehetséges 21 független adat között hány összefüggés fennállását jelenti. A redukció elvégzése nem nehéz, de hosszadalmas számolással jár, így célszerűbb az izotrópiát mindjárt az *Onsager*-féle vezetési törvény felírásakor figyelembe venni. Mivel az  $\mathbf{F}$  feszültségtenzor mindenképp szimmetrikus és az anyagi féltér izotrópiája folytán elegendő a  $\nabla \circ \mathbf{u}$ -ból alkotható szimmetrikus tenzorokat tekintetbe venni, az  $\mathbf{F}$  kifejezése közvetlenül nyerhető. A  $\nabla \circ \mathbf{u}$  szimmetrikus része az

$$\frac{1}{2} \nabla \circ \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \circ \nabla$$

tenzor, továbbá a  $\nabla \mathbf{u}$  skalár, aminek az egységtenzorral való szorzata szintén szimmetrikus:

$$\nabla \mathbf{u} \mathbf{I}$$

E kettőn kívül több független szimmetrikus tenzor nem alkotható, így az  $\mathbf{F}$  a fenti két szimmetrikus tenzor lineáris kombinációja:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \lambda \frac{1}{2} [\nabla \circ \mathbf{u} + \mathbf{u} \circ \nabla] + \mu \nabla \mathbf{u} \mathbf{I} = \\ &= \lambda \mathbf{D} + \mu \Theta \mathbf{I} \end{aligned} \quad (15)$$

ahol  $\lambda$  és  $\mu$  a vezetési együtthatók.

A  $\Theta$  közelítő jelleggel a fajlagos térfogatváltozás mértékének fogható fel.

A (15) skaláris komponensegyenletei:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon_x + \mu (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon_y + \mu (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon_z + \mu (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \tau_{xy} &= \lambda \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \lambda \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \lambda \frac{1}{2} \gamma_{zx} \end{aligned} \quad (15a)$$

Ez a kifejezés minden folytonos (kicsi és nagy) deformáció esetén a feszültségek egzakt értékét adja meg, tehát nem *lineáris közelítés*. Ha a  $\lambda$  és  $\mu$  valamely egyensúlyi állapotra vonatkoztatott konstans, akkor a

Hooke törvénnyel állunk szemben.

A (15), illetve (15a) vezetési törvényt az együtthatók mátrixának pozitív definit volta és szimmetriája teszi teljessé. A (15a) kifejezésekben a szimmetria már figyelembe van véve, így csupán a pozitív definitívítás konkrét következményeit kell megvizsgálnunk. Irjuk fel még egyszer a (15a)-t más rendezésben

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (\lambda + \mu)\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z \\ \sigma_y &= \mu\varepsilon_y + (\lambda + \mu)\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z \\ \sigma_z &= \mu\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y + (\lambda + \mu)\varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}\lambda\gamma_{xy}, \tau_{yz} = \frac{1}{2}\lambda\gamma_{yz}, \tau_{zx} = \frac{1}{2}\lambda\gamma_{zx}\end{aligned}\quad (15b)$$

ahonnan a vezetési mátrix:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda + \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & \lambda + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

A mátrix pozitív definit volta azt jelenti, hogy a mátrix determinánsa, valamint a hozzá tartozó főminir ok determinánsai pozitívak. Az így adódó előjel-relációkat feltétlenül konkrétan kell meghatározni, mert bizonyos sorbafejtések pontatlansága azt eredményezheti, hogy a közelítésekre az előjel-relációk nem teljesülnek. Nyilvánvaló, hogy az ilyen sorbafejtések hamis eredményre vezetnek, tehát nem is alkalmazhatók. Adott esetben feltétlenül ellenőriznünk kell, hogy a sorbafejtéses közelítés nincs-e ellentmondásban a vezetési mátrix szimmetrikus és pozitív definit voltaival. A determináns és aldeterminánsok pozitívításának feltevése a következő egyenlőtlenségeket eredményezi:

$$\begin{aligned}\lambda &> 0 \\ \lambda^2 &> 0 \\ \lambda^3 &> 0 \\ \lambda^4 &> 0 \\ \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \mu \\ \mu & \lambda + \mu \end{vmatrix} \lambda^3 &= \lambda^4(\lambda + 2\mu) > 0 \\ \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \mu & \mu \\ \mu & \mu + \lambda & \mu \\ \mu & \mu & \lambda + \mu \end{vmatrix} \lambda^3 &= \lambda^5(\lambda + 3\mu) > 0\end{aligned}$$

amiből az következik, hogy *izotróp esetben az impulzusvezetési együtt-*



hatók mátrixa akkor és csak akkor pozitív definit, ha

$$\lambda > 0 \quad \text{és} \quad \mu > -\frac{\lambda}{3} \quad (16)$$

Amennyiben a sorbafejtés nem ilyen eredményre vezet, nem alkalmazható. Ilyen diszkrepancia elsősorban a  $\mu$ -re vonatkozóan várható, amely negatív is lehet, de a  $-\lambda/3$ -nál feltétlenül nagyobb. (Inkompresszibilis közegben  $\mu = 0$ .)

## 2.5 Jelölések

Mint láttuk, a kontinuumok anyagtörvénye általánosan

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} \nabla \circ \mathbf{u}$$

formában írható fel, amely a feszültségtenzor szimmetritásából következően

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} \mathbf{D}$$

alakot ölti. A  $\mathbf{D}$  tenzort a következőkben a megszokott terminológiával deformációs tenzornak nevezzük, azonban mindig a már definiált értelmet tulajdonítjuk neki.

A feszültség és deformációtenzor a reológiai vizsgálatoknál megszokottabb formában, a

$$\sigma_o = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \text{inv}_1 \mathbf{F} = \frac{1}{3} S,$$

$$\epsilon_o = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{1}{3} \text{inv}_1 \mathbf{D} = \frac{1}{3} \Theta,$$

közepes vagy átlagos feszültség és deformáció felhasználásával, a következőképp írható fel:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F} - \sigma_o \mathbf{I}) + \sigma_o \mathbf{I} = \mathbf{T} + \mathbf{T}_o,$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D} - \epsilon_o \mathbf{I}) + \epsilon_o \mathbf{I} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_o,$$

ahol

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_o & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_o & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_o \end{pmatrix}$$

az ún. *feszültségi deviátor-tenzor*, amely a feszültségállapotnak a hidrosztatikus feszültségállapottól való eltérését reprezentálja,

$$\mathbf{T}_0 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}$$

a *feszültségi gömbtenzor*, amely az átlagos feszültségű hidrosztatikus állapotot írja le,

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y - \epsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z - \epsilon_0 \end{vmatrix}$$

a *deformációs deviátor-tenzor*, amely a térfogatváltozás nélküli torzulási deformációt adja és

$$\mathbf{E}_0 = \begin{vmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{vmatrix}$$

a *deformációs gömbtenzor*, amely az ún. *térfogatváltozási* vagy *izotróp* deformációt írja le.

## 2.6 Az izotrópia és a közelítő feltevések

Az előzőekben láttuk, hogy tökéletesen anizotróp esetben az anyagtörvény megadása 21 impulzus-vezetési függvény meghatározását jelenti. Az egyszerűség kedvéért a következőkben feltételezzük a közetkontinuum izotrópiáját, s ezáltal a feladat 2 függvény meghatározására korlátozódik. Bár közetmechanikai szempontból az izotrópia jelentősége nem kicsiny, mégis ezt nem azért tesszük, mintha a közeteket izotrópoknak tekinthetnénk, hanem mert

- egyrészt az izotróp anyag feltételezésével az anyagegyenlet jelentősen leegyszerűsödik, s így lehetőség nyílik egyszerű és könnyen áttekinthető matematikai apparátus használatára, s ezáltal olyan kvalitatív követ-



keztetések levonására, amelyek a konkrét anyagállandó értékek és *in-situ* paraméterek precíz ismerete nélkül is eligazodást tesz lehetővé, a bányabiztosítószerkezetek kiválasztásához, beépítési technológiájuk kialakításához stb.,

másrészt közeteink nagy része nem tökéletesen anizotróp, hanem speciális irányfüggő tulajdonságokat mutat; vagyis eltérő anyagi és szilárd-sági tulajdonságokat a rétegződéssel párhuzamosan és rá merőlegesen, tehát ortotrópiát. Ez a körülmény hangsúlyozottan aláhúzza az izo-tróp közegfeltételezés alapján végzett vizsgálatokat, ugyanis az izotróp anyagokra vonatkozó eredmények birtokában a reológiai ortotróp kö-zegre vonatkozó összefüggések levezetése ugyanolyan egyszerű, mint a Hooke-törvény alapján a lineárisan rugalmas ortotróp anyagok fizikai egyenletének meghatározása.

Mindezek előrebocsátása után a következőkben az izotróp közegek anyagegyenletének meghatározásával foglalkozunk. Ez a

$$T = f(E)$$

$$T_0 = f_0(E_0)$$

egyenletek konkrét megadását jelenti. A (15) alatt felírtuk az izotróp kon-tinuumok általános anyagtörvényét:

$$F = \lambda D + \mu \Theta I = \lambda D + 3\mu E_0 \quad (15)$$

amely a már tárgyalt bontásban

$$\begin{aligned} T &= \lambda E \\ T_0 &= (\lambda + 3\mu) E_0 \end{aligned} \quad (15')$$

alakban írható fel, ahol  $\lambda$  és  $\mu$  általános függvények, amelyek a termodi-namikai változók és az idő függvénye.

Az anyagegyenlet felírásánál közelítést kell alkalmaznunk, amely két ellentétes követelmény összeegyeztetéséből fakadt:

1. követelmény: az egyenlet a közet fizikai mechanikai tulajdonságait minél adekvátabban tükrözze
2. követelmény: a matematikai megfogalmazáshoz a lehető legegyszerűbb – a gyakorlati számításokhoz minél könnyebben kezelhető – modellt megtalálni.

A két követelmény összeegyeztetésénél olyan optimumot kell megvalósí-tani, amelynél lehetőség szerint egyszerű matematikai apparátussal a leg-lényegesebb mechanikai tulajdonságokat valósághűen kifejezhetjük és



nagyjából tisztában vagyunk a közelítés jóságával, az elkövetett hiba nagyságrendjével.

Az anyagtörvény meghatározásánál a következő feltételezéssel élhetünk:

1. A közetek mechanikai állapota *közvetlenül* – implicite – nem függhet az időtől, mert ez azt jelentené, hogy az anyagi tulajdonságokat kifejező fizikai egyenlet nem invariáns az időmérés kezdetének megválasztására, illetve változására.

Következésképp az idő – közismerten fontos – szerepének figyelembevétele a feszültség és deformációs tenzorok időszerinti deriváltjainak az anyagegyenletben való szerepeltetésével történhet, azaz a fizikai egyenlet

$$\begin{aligned} f(T, E, \dot{T}, \dot{E}, \ddot{T}, \ddot{E}, \dots) &= 0 \\ f_0(T_0, E_0) &= 0 \end{aligned}$$

formájú lehet.

2. Feltételezhető, hogy a magasabbrendű differenciálhányadosok – a feszültségváltozási vagy deformációváltozási gyorsulás, stb. – hatása elhanyagolható, s ezáltal az anyagegyenlet az

$$\begin{aligned} f(T, E, T, E) &= 0 \\ f_0(T_0, E_0) &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

alakúra egyszerűsödik. Ezt a megindokolt elhanyagolást az anyagegyenlet megkívánt egyszerűsége is megköveteli.

3. A feladat ezek után a (17) függvény konkrét típusának meghatározása. Elvi úton ez már nem lehetséges, ui. semmi olyan fizikai (mechanikai támpontunk nincs, amely a (17) függvény konkrét alakját meghatározná. Egyetlen járható út az, hogy különböző függvénytípusokat tételezünk fel és speciálisan megszerkesztett laboratóriumi kísérletsorozatokkal kíséreljük megállapítani azt a függvényformát, amely a mérési eredményekhez legjobban símul. Azonban ez sem tekinthető biztos módszernek. Ugyanis közismert, hogy pl. helytelen lenne a mérési adatokat pontosan magába foglaló függvényt meghatározni – tehát pl.  $n+1$  mérés esetén az anyagegyenlet  $n$ -ed fokú polinomként felírni – mivel az észlelési eredmények többé-kevésbé maguk is hibásak, tehát olyan függvénytípusra van szükségünk, amely a mérési hibákat nagyrészt kiküszöböli és így jobb képet nyújt a vizsgált jelenségről, mint maguk az észlelési adatok. Vagyis a mérési értékeket közelítő függvénynek olyannak kell lennie, hogy az eltérések az észlelések hibás voltának legyenek tulajdoníthatók.



Mindezek alapján a legáltalánosabb *lineáris* anyagtörvényt tekinthetjük a közetkontinuumok fizikai tulajdonságának leírására a legjobb közelítésnek. Ez pedig az

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{C}_0 + C_1 \mathbf{T} + C_2 \dot{\mathbf{T}} + C_3 \mathbf{E} + C_4 \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f} &\equiv \mathbf{C}'_5 \mathbf{T}_0 + C_6 \mathbf{E}_0 = \mathbf{T}_0 + C_5 \mathbf{E}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (18)$$

formában határozható meg.

A (18) állapotegyenlet, az irodalomban megszokottabb alakban az ún. reológiai állandók szerepeltetésével a következő formában írható fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{C}_0, \\ \mathbf{T}_0 &= 3K\mathbf{E}_0, \quad \dot{\mathbf{T}}_0 = 3K\dot{\mathbf{E}}_0, \end{aligned} \quad (19)$$

amelyet *Hohenemser-Prager* modellnek nevezünk, s amelyben

$G$  – a csúsztató rugalmassági modulus [ $\text{kp}/\text{cm}^2$ ],

$\eta$  – a viszkozitási együttható [ $\text{kp}/\text{cm}^2/\text{nap}$ ], [ $\text{kp}/\text{cm}^2/\text{ó}$ ],

$\tau$  – relaxációs idő [nap], [ó],

$\mathbf{C}_0$  – konstans (képlékenységi) tenzor [ $\text{kp}/\text{cm}^2$ ],

$K$  – kompresszibilitási vagy összenyomhatósági modulus [ $\text{kp}/\text{cm}^2$ ].

A (19) alatti reológiai modell speciális esetként tartalmazza az összes egyszerű lineáris reológiai test állapotegyenletét:

(a) $\mathbf{T} = \mathbf{0}$	[ Pascal (folyadék) test ]
(b) $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E}$	[ Hooke (rugalmas) test ]
(c) $\mathbf{T} = 2\eta\dot{\mathbf{E}}$	[ Newton (folyadék) test ]
(d) $\mathbf{T} = \mathbf{C}_0$	[ Saint-Venant (rideg-képlékeny) test ]
(e) $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}}$	[ Kelvin (rugalmas-viszkózus) test ]
(f) $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} - \tau\dot{\mathbf{T}}$	[ Rugalmas-relaxációs test ]
(g) $\mathbf{T} = 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}$	[ Maxwell (folyadék) test ]
(h) $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + \mathbf{C}_0$	[ Rugalmas képlékeny test ]
(i) $\mathbf{T} = 2\eta\dot{\mathbf{E}} + \mathbf{C}_0$	[ Bingham (viszkoplasztikus) test ]
(j) $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}$	[ Poynting-Thompson test ]
(k) $\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} + \mathbf{C}_0$	[ Rugalmas-viszkózus-képlékeny test ]
(l) $\mathbf{T} = 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{C}_0$	[ Prandtl-Reuss (elasztoplasztikus) test ]

## 2.7 A standard modell

Közetmechanikai vizsgálatoknál az egyszerűbb megoldások érdekében, sok esetben indokolt a fizikai egyenletet *homogén-lineáris* egyenletnek tekinteni – vagyis a számítások és elvi vizsgálatok során a *Poynting–Thomson* féle ún. „*standard*” modellre támaszkodni – ugyanis ez az idealizált modell jó közelítéssel képes visszaadni közeteink jelenleg ismert tulajdonságainak egy részét.

A legáltalánosabb homogén-lineáris anyagmodell – amely az idő hatását csak implicit tartalmazza, így nem függ (invariáns) az időmérés kezdetétől, s amely az elsőnél magasabbrendű deriváltak hatását explicit figyelmen kívül hagyja, ezáltal matematikai formájában annyira egyszerű, hogy gyakorlati feladatok megoldásának megközelítéséhez könnyen kezelhető számítási apparátust kíván csak – a *Poynting–Thomson* modell:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \\ \text{b)} & \mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0; \mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0. \end{array} \quad (20)$$

Ez az összefüggés differenciálegyenlet formájában írja le a feszültség és deformáció tenzor közötti kapcsolatot. Azt, hogy ez reális – megengedhető – anyagtörvényt azt a

$$\begin{array}{l} \mathbf{T} = \lambda\mathbf{E} \\ \mathbf{T}_0 = (\lambda + 3\mu)\mathbf{E}_0 \end{array}$$

egyenlettel való összevetése is mutatja. Bár nem tudjuk a  $\lambda$  és  $\mu$  függvények konkrét alakját meghatározni, de a következő tulajdonság-elemzésekből kitűnik, hogy

$$\lambda > 0,$$

vagyis pozitív  $\mathbf{E}$ -hez pozitív  $\mathbf{T}$ -t rendel, valamint a

$$3K = \lambda + 3\mu$$

összefüggésből:

$$\mu = K - \frac{\lambda}{3}$$

mivel  $K$  pozitív következik,

$$\mu > -\frac{\lambda}{3}$$

tehát a *standard* test kielégíti az *Onsager*-féle pozitív definitivitási feltételeket.



Következőkben vázlatosan áttekintjük a standard modell tulajdonságait.

### 2.71 Egytengelyű feszültségállapot

A laboratóriumi kísérletek kiértékelő eljárásainak megtervezéséhez, valamint a rugalmasságtanban közismert anyagállandókkal való összefüggések tartalmi megvilágítása érdekében írjuk fel az anyagegyenletet az egytengelyű feszültségállapotra vonatkoztatva.

$\sigma$ -val jelölve a tengelyirányú nyúlást és  $\epsilon$ -nal a tengelyirányú,  $\epsilon_v$ -vel a keresztirányú fajlagos nyúlást, a feszültségi és deformációs tenzorok, illetve deviátoraik a következők:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \epsilon - \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_v - \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_v - \epsilon_0 \end{pmatrix},$$

és

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma, \quad \dot{\sigma}_0 = \frac{1}{3} \dot{\sigma}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{3} (\epsilon + 2\epsilon_v), \quad \dot{\epsilon}_0 = \frac{1}{3} (\dot{\epsilon} + 2\dot{\epsilon}_v),$$

Írjuk fel a (20a) tenzoregyenlet  $\sigma$ -ra vonatkozó komponensegyenletét:

$$\sigma - \sigma_0 = 2G(\epsilon - \epsilon_0) + 2\eta(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_0) - \tau(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0),$$

amely a (20b) felhasználásával

$$\sigma - \sigma_0 = 2G\left(\epsilon - \frac{\sigma_0}{3K}\right) + 2\eta\left(\dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}_0}{3K}\right) - \tau(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0) \quad (21)$$

alakra hozható. A

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma \quad \text{és} \quad \dot{\sigma}_0 = \frac{1}{3} \dot{\sigma}$$

összefüggések segítségével a (21) egyenlet átrendezve a

$$\frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{G}{3K} \right] \sigma = 2G\epsilon + 2\eta\dot{\epsilon} - \frac{2}{3} \left[ \tau + \frac{\eta}{3K} \right] \dot{\sigma}, \quad (22)$$

$$\sigma = \frac{9GK}{3K+G} \epsilon + \frac{9\eta K}{3K+G} \dot{\epsilon} - \frac{3K\tau + \eta}{3K+G} \dot{\sigma}$$

formában írható fel.  
Vezessük be az

$$E = \frac{9GK}{3K+G}$$

$$\lambda = \frac{9\eta K}{3K+G}$$

$$\vartheta = \frac{3K\tau + \eta}{3K+G}$$

jelöléseket, amelyekkel a (22)

$$\sigma = E\epsilon + \lambda\dot{\epsilon} - \vartheta\dot{\sigma} \quad (23)$$

egyszerű formában írható fel, ahol

$E$  – a *Young*-féle rugalmassági modulus [kp/cm<sup>2</sup>],

$\lambda$  – a lineáris viszkózitási tényező vagy kúszási tényező [kp/cm<sup>2</sup>/nap],  
[kp/cm<sup>2</sup>/ó],

$\vartheta$  – a relaxációs állandó [nap], [ó].

A lineárisan rugalmas *Hooke* testnél az  $E$  rugalmassági modulus és a  $G$  csúsztató rugalmassági modulus közötti kapcsolatot az  $m$  *Poisson*-számmal is kifejezhetjük. Felhasználva ezen közismert összefüggést, az alábbi egyenletek vezethetők le:

$$E = 2G \frac{m+1}{m}, \quad G = \frac{E}{2} \frac{m}{m+1},$$

$$\lambda = 2\eta \frac{m+1}{m}, \quad \eta = \frac{\lambda}{2} \frac{m}{m+1},$$

$$\vartheta = 2\tau \frac{m+1}{3m} + \frac{\eta}{G} \frac{m-2}{3m},$$

$$\tau = \frac{1}{2} \vartheta \frac{3m}{m+1} - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{E} \frac{m-2}{m+1},$$

$$K = \frac{2}{3} G \frac{m+1}{m-2} = \frac{1}{3} E \frac{m}{m-2}.$$

## 2.72 A standard test mechanikai modellje

A *Poynting–Thompson* test mechanikai modelljét a 6. ábra mutatja, amely a *Hooke* testet reprezentáló  $C_1 = E$  rugóállandójú és egy vele párhuzamosan kapcsolt  $C_2$  rugóállandójú rugóból, valamint egy  $\mu_2$  visz-



kozítású folyadékkal töltött hengerből áll, amelyben perforált dugattyú mozog. Ha  $x$ -el jelöljük az  $F$  erő támadáspontjának elmozdulását,  $x_1$ ,  $x_2$ -vel a bal és jobb oldali ág elmozdulását, és  $F_1$ ,  $F_2$ -vel az egyes ágakban működő erőt, akkor a mechanikai modell működését leíró egyenletet az alábbi feltételezésekből vezethetjük le:

egyensúlyi feltétel:  $F = F_1 + F_2$ ,

elmozdulások egyenlőségének feltétele:  $x_1 = x_2 = x$ .

Figyelembe véve, hogy

$$x = x_1 = \frac{F_1}{C_1}, \quad \dot{x} = \dot{x}_1 = \frac{\dot{F}_1}{C_1}, \quad \dot{x} = \dot{x}_2 = \frac{\dot{F}_2}{\mu_2} + \frac{\dot{F}_2}{C_2},$$

felírható a következő összefüggés,

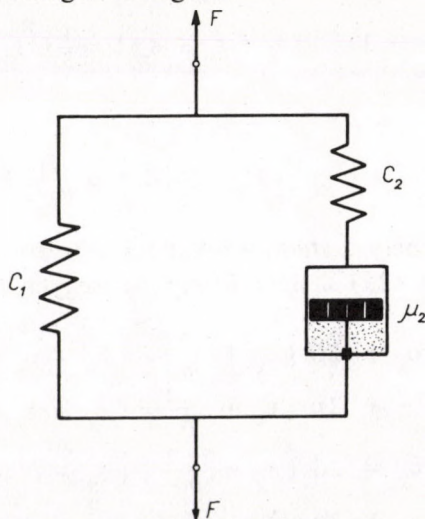
$$F = C_1 x + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \mu_2 \dot{x} - \frac{\mu_2}{C_2} \dot{F},$$

amelynek a (15) egyenlettel való azonossága nyilvánvaló, ha bevezetjük a

$$F = \sigma, \quad F = \dot{\sigma}, \quad \epsilon = x, \quad \dot{\epsilon} = \dot{x},$$

$$C_1 = E, \quad \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) \mu_2 = \lambda, \quad \frac{\mu_2}{C_2} = \vartheta$$

jelöléseket, tehát a 6. ábrán látható mechanikai modell megfelel a Poynting–Thompson-féle reológiai közegnek.



6. ábra. A Poynting-Thomson test mechanikai modellje

## 2.73 Fizikai egyenlet a feszültségi és deformációs tenzorral

Közetmechanikai feladatok megoldásánál számos esetben szükség van arra, hogy a fizikai egyenlet a deviátor és gömbtenzor helyett a feszültség és deformáció tenzorral egyetlen kifejezésbe összevonva írjuk fel.

A (20) alatti összefüggés felhasználásával írható, hogy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \mathbf{T} + \mathbf{T}_0 = 2G\mathbf{E} + 3K\mathbf{E}_0 + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}} = \\
 &= 2G(\mathbf{D} - \mathbf{E}_0) + 3K\mathbf{E}_0 + 2\eta(\dot{\mathbf{D}} - \dot{\mathbf{E}}_0) - \tau(\dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{T}}_0) = \\
 &= 2G\mathbf{D} + (3K - 2G)\mathbf{E}_0 + 2\eta\dot{\mathbf{D}} + (3K\tau - 2\eta)\dot{\mathbf{E}}_0 - \tau\dot{\mathbf{F}} = \\
 &= 2G[\mathbf{D} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\mathbf{E}_0] + 2\eta[\dot{\mathbf{D}} + \left(\frac{3K\tau}{2\eta} - 1\right)\dot{\mathbf{E}}_0] - \tau\dot{\mathbf{F}}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
 \frac{3K}{2G} - 1 &= \frac{\frac{Em}{m-2}}{\frac{Em}{m+1}} - 1 = \frac{3}{m-2}, \\
 \frac{3K}{2\eta}\tau - 1 &= \frac{\frac{Em}{m-2}\tau}{\frac{\lambda m}{m+1}} - 1 = \frac{E}{\lambda} \frac{m+1}{m-2} \tau - 1,
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_0 = \epsilon_0 \mathbf{I} = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)\mathbf{I} = \frac{1}{3}\Theta \mathbf{I},$$

a (24) képlet

$$\mathbf{F} = 2G[\mathbf{D} + \frac{\Theta}{m-2}\mathbf{I}] + 2\eta[\dot{\mathbf{D}} + \mu \frac{\dot{\Theta}}{m-2}\mathbf{I}] - \tau\dot{\mathbf{F}} \tag{25}$$

alakra hozható, amely a *standard test feszültségre megoldott fizikai egyenletét* jelenti. A (25) skaláris komponensegyenletei a következők:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x + \tau\dot{\sigma}_x &= 2G[\epsilon_x + \frac{1}{m-2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)] + \\
 &\quad + 2\eta[\dot{\epsilon}_x + \frac{1}{m-2}(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z)], \\
 \sigma_y + \tau\dot{\sigma}_y &= 2G[\epsilon_y + \frac{1}{m-2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)] + \\
 &\quad + 2\eta[\dot{\epsilon}_y + \frac{1}{m-2}(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z)],
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sigma_z + \tau \dot{\sigma}_z &= 2G \left[ \epsilon_z + \frac{1}{m-2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] + \\
&\quad + 2\eta \left[ \dot{\epsilon}_z + \frac{1}{m-2} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) \right], \\
\tau_{xy} + \tau \dot{\tau}_{xy} &= G\gamma_{xy} + \eta \dot{\gamma}_{xy}, \\
\tau_{yz} + \tau \dot{\tau}_{yz} &= G\gamma_{yz} + \eta \dot{\gamma}_{yz}, \\
\tau_{zx} + \tau \dot{\tau}_{zx} &= G\gamma_{zx} + \eta \dot{\gamma}_{zx},
\end{aligned}$$

ahol

$$\mu = \frac{1}{3} [(m+1) \frac{E}{\lambda} \tau - (m-2)] = \frac{1}{3} [(m+1) \frac{G}{\eta} \tau - (m-2)].$$

Hasonlóképpen állíthatjuk elő a *deformációra megoldott* fizikai egyenletet is. A

$$\mathbf{T} = 2G(\mathbf{D} - \mathbf{E}_0) + 2\eta(\dot{\mathbf{D}} - \dot{\mathbf{E}}_0) - \tau \mathbf{T}$$

összefüggésből ugyanis

$$\begin{aligned}
2GD + 2\eta \dot{\mathbf{D}} &= \mathbf{T} + 2G\dot{\mathbf{E}}_0 + \tau \dot{\mathbf{T}} + 2\eta \dot{\mathbf{E}}_0 = \\
&= \mathbf{F} - \mathbf{T}_0 + \frac{2G}{3K} \mathbf{T}_0 + \tau(\dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{T}}_0) + \frac{2\eta}{3K} \dot{\mathbf{T}}_0 = \\
&= \mathbf{F} + \left(\frac{2G}{3K} - 1\right) \mathbf{T}_0 + \tau \dot{\mathbf{F}} + \left(\frac{2\eta}{3K} - \tau\right) \dot{\mathbf{T}}_0,
\end{aligned} \tag{26}$$

s mivel

$$\begin{aligned}
\frac{2G}{3K} - 1 &= -\frac{3}{m+1}, \\
\frac{2\eta}{3K} - \tau &= \frac{\lambda}{E} \frac{m-2}{m+1} - \tau, \\
\mathbf{T}_0 &= \sigma_0 \mathbf{I} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \mathbf{I} = \frac{1}{3} S \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

a (26) helyett írható

$$2GD + 2\eta \dot{\mathbf{D}} = \left[ \mathbf{F} - \frac{S}{m+1} \mathbf{I} \right] + \tau \left[ \dot{\mathbf{F}} - \frac{\mu \dot{S}}{m+1} \mathbf{I} \right] \tag{27}$$

amelynek skaláris komponensegyenletei a következők:

$$\begin{aligned}
 E\epsilon_x + \lambda\dot{\epsilon}_x &= [\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)] + \vartheta [\dot{\sigma}_x - \frac{\kappa}{m}(\dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z)] \\
 E\epsilon_y + \lambda\dot{\epsilon}_y &= [\sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)] + \vartheta [\dot{\sigma}_y - \frac{\kappa}{m}(\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x)] \\
 E\epsilon_z + \lambda\dot{\epsilon}_z &= [\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)] + \vartheta [\dot{\sigma}_z - \frac{\kappa}{m}(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)] \\
 G\gamma_{xy} + \eta\dot{\gamma}_{xy} &= \tau_{xy} + \tau\dot{\tau}_{xy} \\
 G\gamma_{yz} + \eta\dot{\gamma}_{yz} &= \tau_{yz} + \tau\dot{\tau}_{yz} \\
 G\gamma_{zx} + \eta\dot{\gamma}_{zx} &= \tau_{zx} + \tau\dot{\tau}_{zx}
 \end{aligned} \tag{28}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 \nu &= \frac{\lambda\mu}{E\tau} = \frac{1}{3} [(m+1) - \frac{\lambda}{E\tau}(m-2)], \\
 \kappa &= \frac{\tau\nu}{\vartheta} = \frac{\lambda\mu}{E\vartheta} = \frac{\eta\mu}{G\vartheta}
 \end{aligned}$$

A (28) összefüggés a *standard test deformációra megoldott fizikai egyenletét* jelenti.

## 2.74 A standard modell tulajdonságai

*Állandó feszültségváltozási sebesség.*  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_a =$  konstans esetben (23) állapotegyenlet

$$\epsilon + \frac{E}{\lambda}\epsilon = \frac{\dot{\sigma}_a}{\lambda}t + \frac{\dot{\sigma}_a}{\lambda}\vartheta$$

formában írható fel. Az

$$\dot{\epsilon} + \frac{E}{\lambda}\epsilon = 0$$

homogén differenciálegyenlet megoldása – mint láttuk –

$$\epsilon = C e^{-\frac{E}{\lambda}t},$$

amelynek az inhomogén differenciálegyenletbe történő visszahelyettesítésével a  $C = C(t)$  függvény a



$$\frac{dC}{dt} e^{-\frac{E}{\lambda} t} = \frac{\sigma_a}{\lambda} (\vartheta + t)$$

egyenlet integrálásával határozható meg:

$$\begin{aligned} C &= \int dC = \frac{\dot{\sigma}_a}{\lambda} \int (\vartheta + t) e^{\frac{E}{\lambda} t} dt = \\ &= \frac{\dot{\sigma}_a}{E} \vartheta e^{\frac{E}{\lambda} t} + \frac{\dot{\sigma}_a}{\lambda} \int t e^{\frac{E}{\lambda} t} dt = \\ &= \frac{\dot{\sigma}_a}{E} \vartheta e^{\frac{E}{\lambda} t} + \frac{\dot{\sigma}_a}{E} t e^{\frac{E}{\lambda} t} - \frac{\dot{\sigma}_a \lambda}{E E} e^{\frac{E}{\lambda} t} + A, \end{aligned}$$

s így

$$\epsilon = \frac{\dot{\sigma}_a}{E} \left[ t - \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) + A' e^{-\frac{E}{\lambda} t} \right],$$

amelyben az  $A'$  integrációs állandó az

$$\epsilon \Big|_{t=0} = \frac{\dot{\sigma}_a}{E} \left[ \vartheta - \frac{\lambda}{E} + A' \right] = 0$$

kezdeti feltétel alapján írható fel:

$$A' = \frac{\lambda}{E} - \vartheta.$$

Ennek megfelelően a deformáció időbeli változása az

$$\epsilon = \frac{\dot{\sigma}_a}{E} \left[ t - \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) (1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t}) \right]$$

képlettel reprezentálható, amelyet a 7. ábra mutat különböző feszültség-változási sebességek mellett.

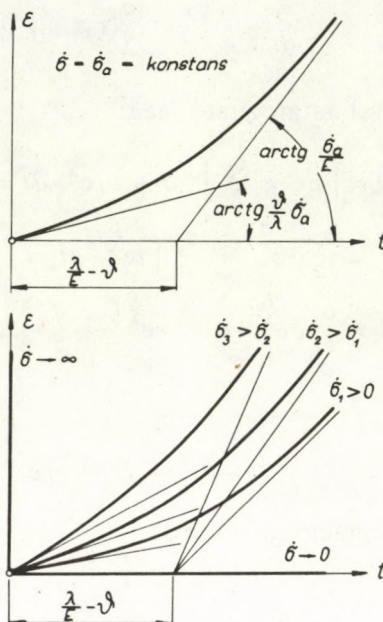
A deformáció-feszültség közötti összefüggés a következő

$$\epsilon = \frac{1}{E} \left[ \sigma - \dot{\sigma}_a \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) (1 - e^{-\frac{E}{\lambda} \frac{\sigma}{\dot{\sigma}_a}}) \right].$$

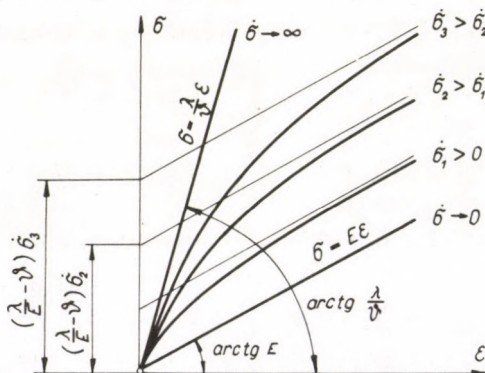
A 8. ábrából kiolvasható, hogy nagyon lassú terhelésváltozásnál ( $\dot{\sigma} = 0$ ), valamint a

$$\frac{\lambda}{E} = \vartheta$$

esetben, amikor a deformációk késésének ideje megegyezik a relaxációs idővel, a modell úgy viselkedik, mint a lineárisan rugalmas *Hooke* test.



7. ábra . A deformáció időbeli változása állandó feszültségváltozási sebesség mellett, standard modell esetében



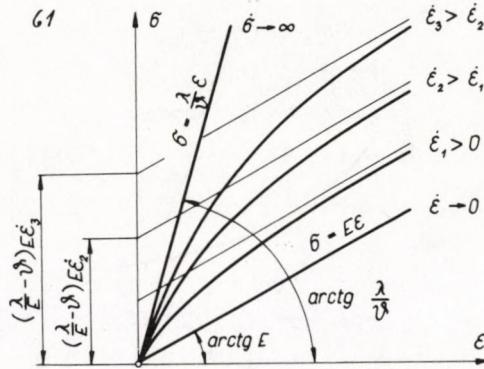
8. ábra . A standard modell feszültség-alakváltozási diagramja állandó feszültségváltozási sebességnél

Allandó deformáció sebesség.  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_a = \text{konstans}$  esetben a kezdeti fel-tételek mellett a



$$\sigma = E \left[ \epsilon + \epsilon_a \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) \left( 1 - e^{-\frac{1}{\vartheta} \frac{\epsilon}{\epsilon_a}} \right) \right]$$

összefüggés érvényes (9. ábra).

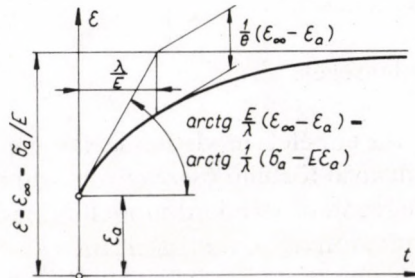


9. ábra . A standard modell feszültség-alakváltozási diagramja állandó deformációsebesség mellett

*Állandó feszültség.* A *Poynting-Thomson*-féle standard modell kúszási görbéje:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma_a}{E} - \left( \frac{\sigma_a}{E} - \epsilon_a \right) e^{-\frac{E}{\lambda} t} = \\ &= \epsilon_\infty - (\epsilon_\infty - \epsilon_a) e^{-\frac{E}{\lambda} t} \end{aligned}$$

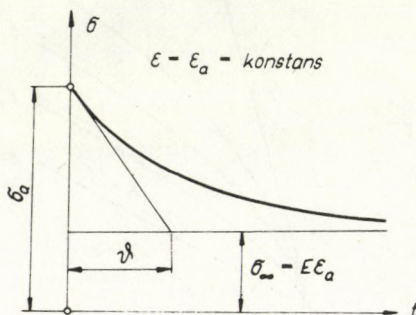
s ezt a 10. ábra mutatja



10. ábra . A Poynting-Thomson test kúszási görbéje

*Allandó deformáció.* A standard testnél rögzített alakváltozás mellett végbemenő feszültségrelaxáció (11. ábra):

$$\begin{aligned}\sigma &= E\epsilon_a + (\sigma_a - E\epsilon_a)e^{-\frac{t}{\vartheta}} = \\ &= \sigma_\infty + (\sigma_a - \sigma_\infty)e^{-\frac{t}{\vartheta}}.\end{aligned}$$



11. ábra: A Poynting–Thomson modell feszültségleépülési diagramja rögzített deformáció esetén

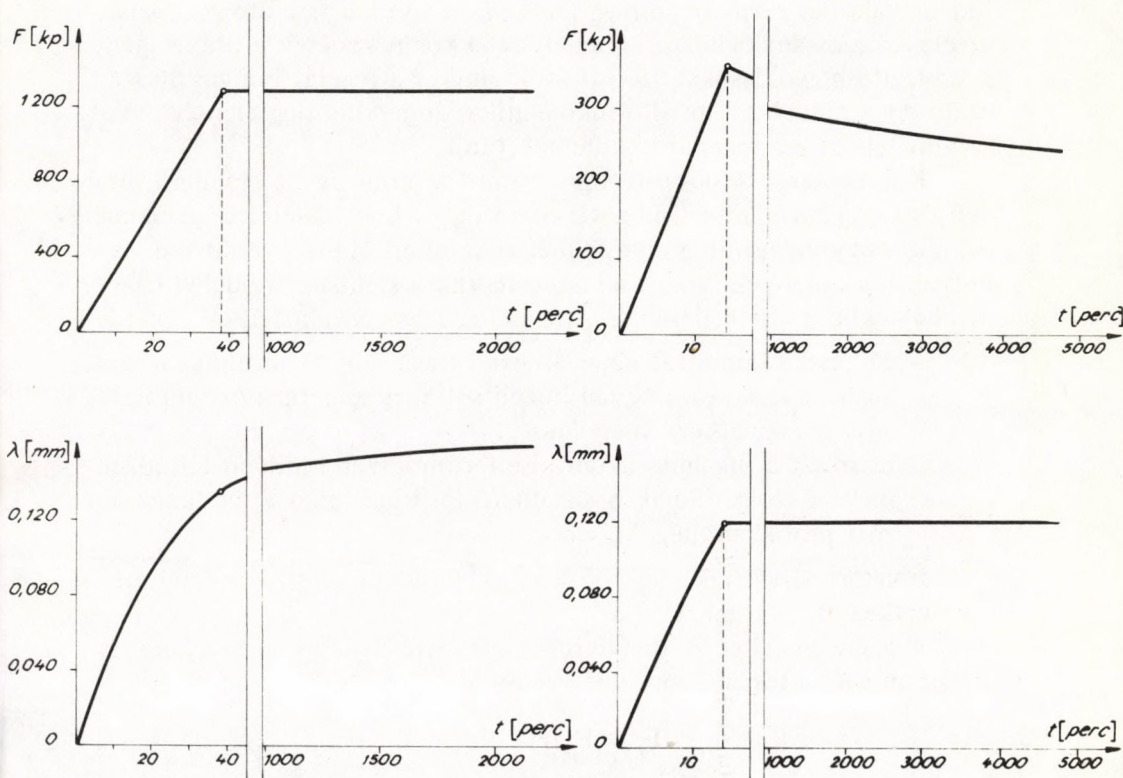
*Egytengelyű kísérlet.* A 12. ábrán a mányi területen végzett 38. számú kutatófúrás magmintáiból készített próbatesteken végzett nagyszámú laboratóriumi kísérlet eredmény közül mutatunk be egyet. A kísérlethez felhasznált próbatest  $\phi$  18 mm  $\times$  30 mm méretű hengeres miliolinás, alveolinás mészkő ( $H = 394,40\text{--}400,70$  m). A 12. ábra baloldalán az ún. kúszásvizsgálatot, míg jobboldalán a relaxációs próba eredményeit tüntettük fel. A kísérlet pregnánsan mutatja, az alakváltozások késését (kúszás jelenségét) és a feszültségek egy meghatározott szintre történő leépülését. A tatabányai és mányi medence kőzeteinek mindegyikénél tapasztaltuk a kőzetminták

- rugalmas viselkedését,
- kúszását és
- a relaxáció jelenségét.

*Következtetés.* Az elméleti modellvizsgálati eredményeknek a kőzetek ismert tulajdonságaival történő összevetése azt mutatta, hogy a homogén–lineáris állapotegyenletű standard modell felhasználása alkalmas a legfontosabb kőzettulajdonságok visszaadására.

Vizsgálataink alapján tehát rendelkezésünkre áll a kőzetek tulajdonságainak visszaadására alkalmas anyagegyenlet.





12. ábra

## 2.8 A rugalmasságtani vizsgálatok felhasználása a kőzetmechanikában

A kőzetmechanika történetéhez tartozik, hogy a bányászati feladatok megoldásánál a legkülönbözőbb — elméleti és empirikus úton kapott — anyagegyenletek alkalmazásával kísérleteztek már. Ezek közül legjelentősebbnek a *matematikai rugalmasságtan* alkalmazását tekintjük, annak ellenére, hogy a rugalmas feltételezéssel számos bányabeli jelenség nem magyarázható precízen, mint pl. a kőzet és a biztosítószerkezet együttdolgozásának időbeli alakulása, a biztosítás és kőzet időben nyújtott alakváltozása, elmozdulása és esetleges tönkremenetele, a fejtések-nél tapasztalt nyomáshullámok terjedése, stb. Ezzel szemben vizsgálati módszerei a legkidolgozottabbak, s olyan modellmódszereket és analógiákat



tud a gyakorlat számára adni — mint pl. az optikai feszültségvizsgálat, az elektromos analógia stb. — amelyek akkor is képesek a praxis igényeit kielégítő megoldásokat szolgáltatni, amikor a feladat bonyolultsága, valamint a rendelkezésre álló matematikai apparátus elégtelensége miatt az elméleti út ma még járhatatlannak tűnik.

Különös érdeklődésre tarthat számot a természet, a standard modell és a rugalmas modell közötti összefüggések vizsgálata. Ugyanis ha tudjuk, hogy a rugalmasságtan elméleti és kísérleti módszereit hol és milyen körülmények között alkalmazhatjuk a standard modellel jellemezhető közeg viselkedésének a leírására, illetve megközelítésére, akkor

- egyrészt támpontot kapunk arra nézve, hogy a rugalmas megoldásból kiindulva, hogyan közelítsük meg az általános reológiai anyagra vonatkozó megoldást,
- másrészt a rugalmasságtan kísérleti módszerei milyen feltételek mellett szolgáltatnak használható információkat a tanulmányozott probléma megoldásához.

E célból vizsgáljuk meg a földkéregben az üregnyitások hatására bekövetkező jelenségeket.

A végtelen feltér az üregnyitás előtt feltételezhetően nyugalmi állapotban van, s feszültségmezeje valamiféle

$$F_p = F_p(r)$$

primer feszültségi tenzorral reprezentálható, amelyet függetlennek tekinthetünk az időtől. A földkéregnek a bányászati céllal vizsgálandó — a felszíntől számított legfeljebb néhány kilométeres — tartományában elmozdulások és alakváltozások lejátszódtak már sok millió évvel ezelőtt, a földkéreg kialakulásakor. Az azóta eltelt idő mindenképpen elégséges volt az elmozdulások és deformációk befejeződéséhez. Mivel a megszilárdult földkéreg a további alakváltozásokat meggátolta, így feltehetően a feszültségek relaxációja is bekövetkezett.

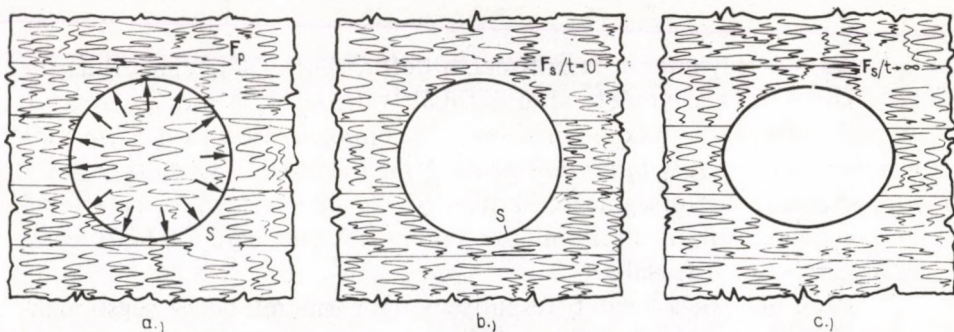
Maga a *primer állapot*, vagyis a primer feszültségek értéke a bányászat számára csupán annyiban érdekes, hogy milyen mozgásokat, alakváltozásokat indukál üregnyitáskor, tehát a termelés biztosítása, az emberek biztonsága szempontjából milyen események bekövetkezésével kell számolni, milyen biztosítást kell alkalmazni. Ha a feszültségek az idő folyamán zérusra csökkentek volna, akkor az üregnyitáskor semmiféle elmozdulást nem észlelnénk. Ha a deformációk a befagyasztott időszak alatt — tehát a földkéreg kialakításától napjainkig — teljes egé-



szében maradó deformációkká alakultak volna, tehát üregnyitáskor elmozdulás nem lenne tapasztalható, akkor a primer feszültségmezőt szintén zérusnak tekinthetnénk. Ami a bányászkodás és a biztosítás szempontjából lényeges, az a *potenciális energia*, amely üregnyitáskor alakváltozási munkává alakul, tehát ami a földkéreg megbolygatásakor az elmozdulásokat és deformációkat létrehozza. Ez a felfogás azt a konklúziót eredményezi viszont, hogy az üregnyitás pillanatában létrejövő módosult feszültségállapot, vagy más szóval a szekunder feszültségi mező az általános rugalmasságtannak megfelelően értelmezhető és számítható, s az idők folyamán – miközben a  $t \rightarrow \infty$  – a deformációk, a rugalmasságtani összefüggéseknek megfelelő deformációs értékekhez konvergálnak. A rugalmas szilárd testekre vonatkozó összefüggések tehát felhasználhatók:

- a kezdeti feszültségállapot, és
- a végső deformációs és elmozdulásállapot

meghatározásához, anélkül természetesen, hogy a közbenső állapotokról felvilágosítást adnának. A standard modell tulajdonságainak elemzésénél láttuk, hogy a rögzített alakváltozások esetén a feszültségek a Hooke-törvény által meghatározott értékre csökkennek és rögzített feszültségek esetén a deformációk a rugalmasságtani összefüggéseknek megfelelő értékekhez konvergálnak. Ezek is mutatják, hogy a standard modellt a földkéreg elfogadható anyagegyenletének tekinthetjük.



13. ábra.

Tekintsük a 13. ábrán látható esetet. Az üregnyitás előtt a végteleen féltér – terhelés alatt álló – egy darabját reprezentáló közettömb nyugalmi állapotban van s tetszőleges  $r$  koordinátájú pontjában a feszültségállapot az  $F_p(r)$  feszültségtenzorral adható meg (13. ábra). Je-



lölje  $S$  a nyitandó üreg felületét. A  $t = 0$  időpontban, az üregnyitás pillanatában (13. b ábra) az  $S$  felületről eltávolítottuk az eddig ott működő belső erőket, így a feszültségmező megváltozik s ekkor már a feszültség-állapot az

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$$

*szekunder feszültségi tenzorral* – illetőleg annak  $t = 0$  időponthoz tartozó értékével – jellemezhető. Ha a primer feszültségmező nem függött a közetállandóktól, akkor a szekunder mező  $t = 0$  időpontbani értéke sem függhet a reológiai jellemzőktől – hanem csupán az üregnyitás helyétől és alakjától, helyesebben az  $S$  felületen támadó belső erőktől és megoszlásától (vagyis a primer feszültségektől), amelyeket az üregnyitással eltávolítottunk az  $S$  felületről.

Az üregnyitás pillanatában a kerület pontjainak elmozdulása még zérus, így ebben az időpontban az egész elmozdulásmező is zérusnak tekinthető:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Big|_{t=0} = 0,$$

s a deformációk és elmozdulások összefüggéséből következően a deformációs tenzor is zérus:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \Big|_{t=0} = 0.$$

Az idő folyamán a feszültségi, a deformációs és az elmozdulásmező a közet anyagegyenlete által definiált változásokon megy keresztül. Az idő múltával – miközben  $t \rightarrow \infty$  – az elmozdulások és deformációk a *potenciális energia minimum elvének* megfelelően, a kezdeti ( $t = 0$  időpontbani) feszültségmezőhöz tartozó rugalmas alakváltozási értékekhez tartanak, miközben a rendszer potenciális energiája a lehető legalacsonyabb szintet foglalja el.

Ezek alapján a kezdeti feszültségtenzor ismeretében a végső alakváltozási mező a *Hooke* törvénynek megfelelően számítható.

*Összefoglalva* elmondhatjuk, hogy a rugalmasságtan elméleti és kísérleti módszereit és eljárásait felhasználhatjuk a kezdeti feszültségi és a végső deformációs állapot megismeréséhez. A rugalmasságtani megoldások akkor is értékesek számunkra, amikor a közbenső állapot ismerete feltétlenül szükséges, amikor a közetnyomás időbeli alakulásával,



a biztosítószerkezet időbeli viselkedésével foglalkozunk, mert támpontot szolgáltatnak arra nézve, hogy milyen formában keressük a megoldást. Ennek alapján elmondható, hogy az összes olyan közetmechanikai probléma reológiai megoldását egyszerűen előállíthatjuk, amelynek a *Hooke* testre vonatkozó megoldását már ismerjük, vagy amely a rugalmasságtan kísérleti módszereinek valamelyikével modellezhető.





### 3. FEJEZET

## KÖZETÁLLANDÓK LABORATÓRIUMI MEGHATÁROZÁSA KÚSZÁSVIZSGÁLATTAL

### 3.1 Bevezető megjegyzések

A földkéreg, amelyben a hasznos anyagok kitermelése céljából bányatérsegeket nyitunk, állandó feszültség alatt van. A bányatérsegek kialakításával megbomlik a kialakult egyensúlyi állapot és különböző kőzetmozgások, deformációk jönnek létre, amelyeket a bányászati tevékenység kísérő jelenségeinek tekintünk. Ezeknek a jelenségeknek a lefolyása, intenzitása

- a természeti feltételektől és
- a bányászati tevékenység módjától (bányatérsegek kihajtási módjától, az üregek elhelyezkedésétől, nyitvatartási idejétől és alakjától, a művelési rendszertől)

függ.

Az elmondottak alapján a kőzetmechanikai vizsgálatok célja is kétirányú. Egyrészt minél jobban megismerni a természet adta körülményeket, a bányatérsegek környezetének nyomásviszonyait, a mező tektonikai felépítését, a vetők, gyűrődések elhelyezkedését, a kőzetrétegek fizikai–mechanikai tulajdonságait. Másrészt olyan művelési módokat, rendszereket, technológiákat kidolgozni, amelyek alkalmazkodnak az in-situ adottságokhoz úgy, hogy a legkisebb költséggel és legkisebb ásványvagyon-veszteség mellett biztosítják a kitermelést. Mindkét feladathoz alapvetően szükséges a kőzetanyag beható vizsgálata mechanikai szempontból.

Csak a mechanikai jellemzők birtokában lehet remény arra, hogy számítással követni tudjuk a kőzetköpenyben végbemenő folyamatokat. A kőzetkarakterek ismerete u.i. elengedhetetlenül szükséges a bányatérsegek környezetében lejátszódó jelenségek előrejelzéséhez, a biztosítási rendszer megválasztásához, a helyes beépítési technológia kialakításához stb.



A következőkben éppen ezért a közetállandók megismerésével foglalkozunk, laboratóriumi mérési módszert mutatunk be.

A műszaki gyakorlatban szokásos módon felmerül a kérdés, nem lehet-e közetanyagot a fémek anyagok, az építőanyagok stb. mintájára rugalmasnak, *Hooke* törvényét követőnek felfogni. Nyilvánvalóan egy bizonyos közelítést jelent ez. A rugalmas modell azonban időtől független, azaz nem érzékeny az időbeli változásokra. Ugyanakkor a bányászati gyakorlat eddigi megfigyelései azt mutatják, hogy az időtényezőnek jelentős szerepe van a közetköpeny feszültségi állapotának és deformációjának kialakulásában. Ennek alapján viszont az egyszerű rugalmas modell nem nevezhető jó közelítésnek.

A közetnyomás és a hatására létrejövő deformációk időbeli változása két alapvető okra vezethető vissza:

- az üregek képzésének és megszűnésének (vagyis a bányászati tevékenység) időben lejátszódó folyamatára,
- a közetek bizonyos anyagi tulajdonságaira, amelyek a közetek kúszásában, relaxációjában stb. nyilvánul meg.

Az utóbbi okok nyilvánvalóvá teszik, hogy a bányatérsegeket körülvevő közetköpenyt legtöbbször időfüggő, „*reológiai*” közegnek kell tekinteni. Ennek megfelelően kell az anyag fizikai egyenletét felállítani.

Az előző fejezetben a különböző egyszerűbb anyagegyenletű reológiai testek tulajdonságainak a reális közettulajdonságokkal való összevetéséből azt a következtetést vontuk le, hogy a közetet a

$$\sigma = E\epsilon + \lambda \dot{\epsilon} - \vartheta \ddot{\epsilon}$$

homogén-lineáris anyagegyenletű, *Poynting–Thompson*-féle ún. *standard* testtel modellezhetjük.

Feltételezzük tehát a továbbiakban, hogy a közet ennek az anyagegyenletnek tesz eleget. Ezt szem előtt tartva a következőkben ezen anyagállandók meghatározására mutatunk be kísérletet, egytengelyű laboratóriumi nyomópórával.

### 3.2 Egytengelyű nyomókísérletek

A közetminták laboratóriumi nyomásvizsgálatának célja a törőszilárdság értékének meghatározásától eltekintve kétféle lehet:

- a közet egytengelyű feszültség–deformáció kapcsolatának (a nyagegyenletének) meghatározása,



– az anyagállandók konkrét megállapítása.

Sajnos arra nem ad választ az egytengelyű nyomókísérlet, hogy a kőzetek anyagegyenlete milyen, illetve a választott fizikai egyenletet milyen közelítéssel alkalmazhatjuk. Ennek két oka van:

1. A laboratóriumi kísérlet lefolyását (elvégzését) megtervezni és a mérendő paraméterek körét meghatározni csak a mechanikai változók – a feszültségek és deformációk – közötti összefüggés feltételezésével lehet. Tehát ha feltételezzük, hogy a fizikai egyenletet ismert  $f_1, f_2, f_3$  függvényekkel pl.

$$\sigma = f_1(\epsilon) + f_2(\dot{\epsilon}) + f_3(\ddot{\epsilon})$$

formában írhatjuk fel, vagyis az egyes változók additív függvényei összegeként, akkor a megfelelően megtervezett kísérlet eredményeiből az ismeretlenek – a legkisebb négyzetek elvének felhasználásával – meghatározhatók. Azonban semmi garanciánk nincs arra nézve, hogy valamilyen más megfontolással, pl.

$$\sigma = F_1(\epsilon) + F_2(\dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon})$$

alakban nem kaphatunk-e a valóságot jobban megközelítő anyagtörvényt

2. A kísérletből konkrétan meghatározott összefüggés, anyagállandók csak egytengelyű feszültségállapotnál jellemzőek a kőzetre. Közismert, hogy az anyagállandók többé-kevésbé maguk is függvényei a feszültségállapotnak, pl. kimutatták, hogy bizonyos határok között függnek a mélységtől, hogy azonos anyagoknál eltérés mutatkozhat az egytengelyű és a triaxiális kísérletekkel kapott kőzetkarakter értékek között.

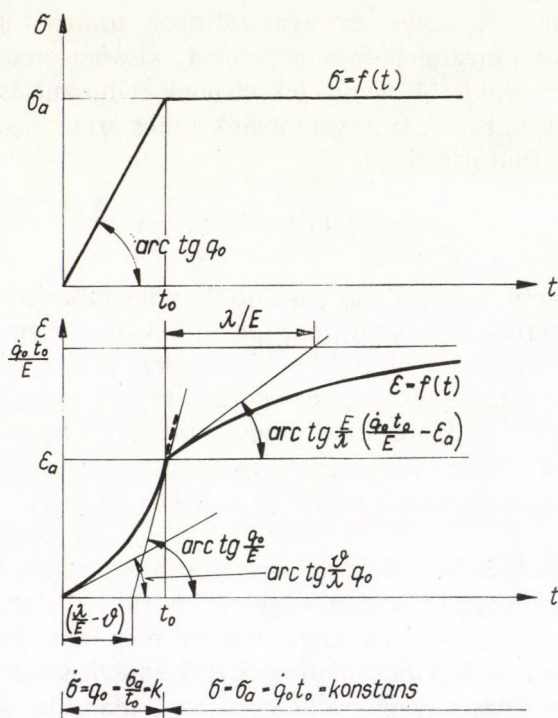
Az elmondott nehézségek ellenére igen hasznosak a bányászati gyakorlat és tervezés számára az egytengelyű kísérletek adatai, hiszen segítségükkel legalább egytengelyű állapotban jól meg lehet közelíteni az időtől is függő szilárdsági viszonyokat. Ezzel eddigi ismereteinket bővíteni lehet, egyes kőzetanyagokra a számszerű állandók meghatározásával. Főképp az indokolja az egytengelyű vizsgálatokat, hogy általában nincs lehetőség in-situ mérések véghezvitelére. A reológiai állandók egytengelyű nyomókísérlettel történő meghatározásával *H. Filcek* [13] és *Z. Kleczek* [18] tanulmánya részletesen foglalkozik.

A feszültség illetve deformáció időbeli változásának előidézésére főként az alábbi kísérletek alkalmasak:



- ( a )  $\dot{\sigma} = \text{konstans}$  [ arányos terhelési próba ]  
 ( b )  $\dot{\epsilon} = \text{konstans}$  [ arányos deformációs próba ]  
 ( c )  $\sigma = \text{konstans}$  [ kúszási próba ]  
 ( d )  $\epsilon = \text{konstans}$  [ relaxációs próba ]

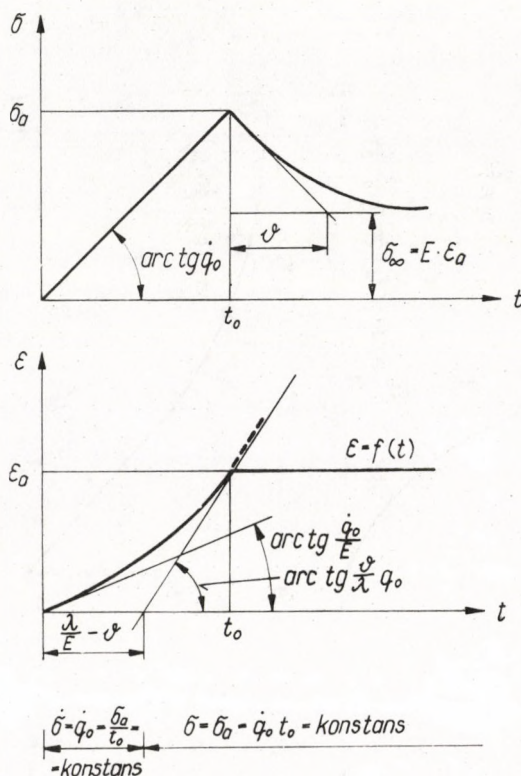
Ezen próbák kombinálásával a következő egytengelyű nyomókísérletek végezhetők el a közetállandók meghatározására:



14. ábra

a) A próbatest 0-tól egy meghatározott  $\sigma_a$  értékig történő fokozatos terhelése állandó feszültségváltozási sebesség mellett, majd rögzített  $\sigma_a$  feszültségértéken az anyag kúszásának regisztrálása (14. ábra).





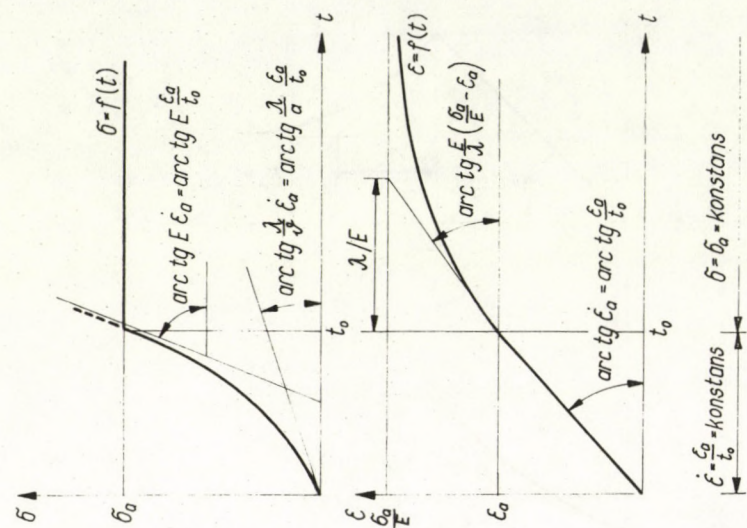
15. ábra.

b) A próbatest állandó feszültségváltozási sebesség mellett terhelése  $\sigma_a$  értékig, s a  $t_0$  időpontban a  $\sigma_a$ -hoz tartozó  $\epsilon_a$  deformációs érteken történő rögzítés esetén a feszültségek relaxációjának regisztrálása (15. ábra).

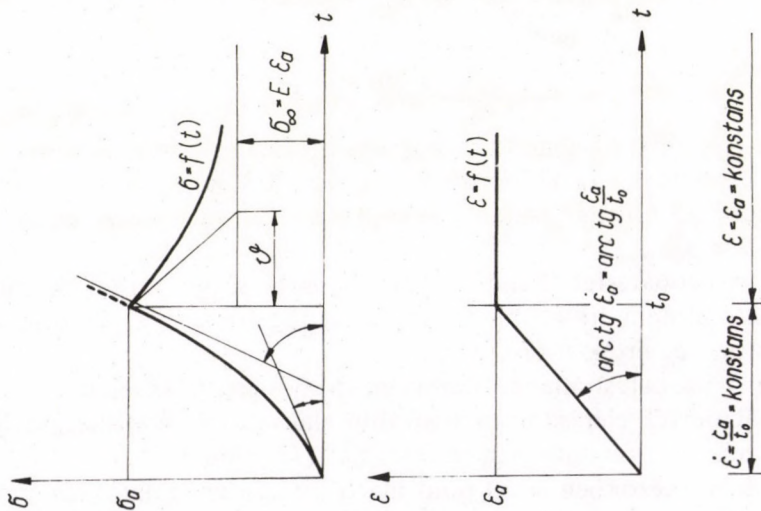
c) A próbatestet állandó deformációsebességgel terheljük, míg az  $\epsilon_a$  értéket el nem érjük, majd a terhelést rögzítjük az  $\epsilon_a$  deformációhoz tartozó  $\sigma_a$  értéken (16. ábra).

d) A próbatest állandó deformációsebességgel terhelődik, s az  $\epsilon_a$  deformációérték elérése után a további alakváltozásokat meggátoljuk, s regisztráljuk a feszültségek relaxációját (17. ábra).

A következőkben az a) pont alatti kúszási vizsgálatokról számolunk be.



16. ábra.

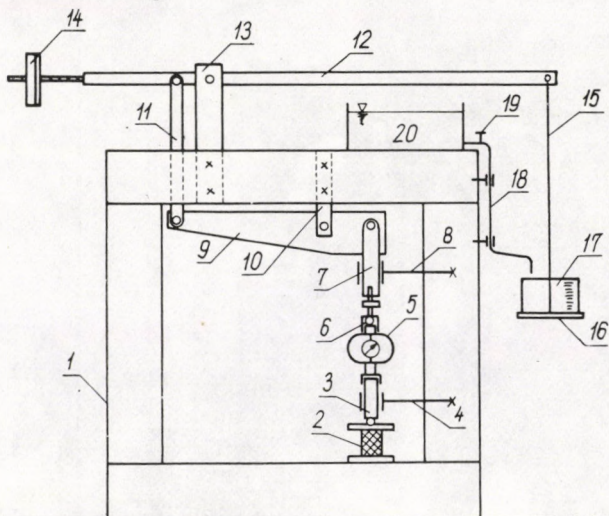


17. ábra.



### 3.3 A kísérleti berendezés

A vizsgálathoz szükséges nyomóerőt a 18. ábrán vázolt berendezéssel valósítottuk meg.

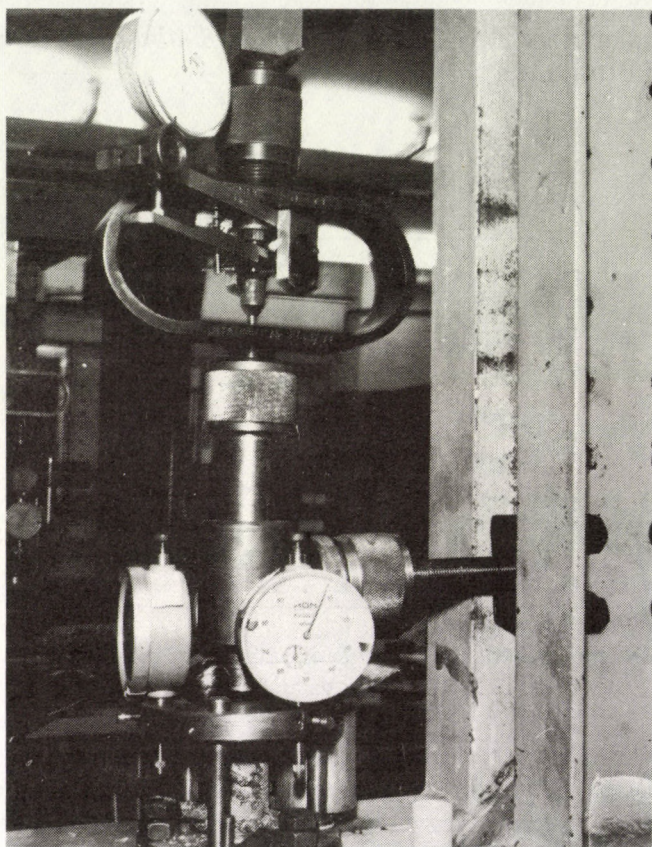


18. ábra. Kísérleti berendezés kőzetminták laboratóriumi kúszás vizsgálatához

Az 1 merev kerethez csatlakozik a nyomólapok között elhelyezett 2 próbatest. A terhelő erőt a 3 nyomóhenger adja át, melyet a 4 hüvely egyenesbe vezet. Közvetlen ide csatlakozik az 5 hitelesített erőmérő, amely mérőórával ellátott rugalmas ív. Felső végén a csavarmennettel állítható 6 terhelő fej közvetíti az erőt a 7 terhelő rudazaton át, melyet 8 egyenesbe vezető támaszt oldalirányban. Az erőt a 9 kétkarú emelő szolgáltatja a 10 támaszon csuklósan ágyazva. Másik végével csatlakozik 11 rudazaton keresztül a 12 kétkarú emelőhöz. Ez viszont a 13 támasszal van csuklósan megfogva. Baloldali végén csavarmennettel állítható 14 tarasúly helyezkedik el, jobboldali végén pedig a 15 mérlegrúd. A 16 mérlegtányérra kerül a 17 kalibrált üvegedény. Ebbe jut a 18 csővezetéken át a szabályozható 19 csap megnyitásával a 20 tartályban tárolt víz.

A 19. ábra a Gödöllői Agrártudományi Egyetem Mechanikai Tan-  
széki laboratóriumában felállított berendezést mutatja.

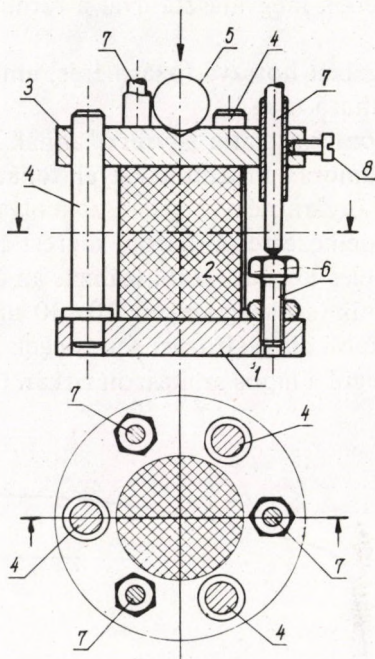




19. ábra. Egytengelyű nyomókészülék erő és elmozdulásméréssel.  
A készülékben egy eltört, mellette egy ép próbatest látható.

A 20. ábra részletezi a próbatest viszonyait. Az 1 alap mereven csatlakozik a keretre. Alsó lapján bekarcolt koordináta-rendszerben helyezkedik el centrikusan a 2 próbatest. Felső lapjához csatlakozik a 3 terhelő lap, melyet 4 tájoló csapok mindig azonos helyzetbe állítanak az alaphoz képest, biztosítva a párhuzamosságot és a centrikusságot is. A terhelő lap felső részén centrikusan elhelyezett golyófészek vannak kialakítva. Ide ér a terhelést átadó 5 golyó. Így a próbatest terhelésének centrikusságát a terhelő berendezés nagy pontossággal biztosítja. 6 csa-





20. ábra.

varmenettel függőlegesen beállítható mérő bázisfelületekhez érnek a 7 mérőórák, melyeket 8 csavar rögzít a terhelő laphoz  $120^\circ$ -os szögben elhelyezve.

A kettős áttétel ( $10 \times 10$ ) segítségével viszonylag kis súlyterhelés biztosítja a próbatest elegendő nagyságú nyomó terhelését. A mozgó karokon fellépő esetleges súrlódást, illetve az áttételi hibát figyelmen kívül lehet hagyni, mivel az erőmérő közvetlen a teherátadás helyen van beiktatva.

A terhelést  $\sigma = \text{konstans}$  feltétellel úgy visszük fel, hogy a 19 csap megnyitásával vizet engedünk a 17 üvegedénybe. Az előírt súly elérésekor a csapot zárjuk. A 20 tartályban a vívmagasságot állandónak tartva, a kifolyás sebessége állandó, tehát az állandó feszültségsebességet valóban megvalósítja a berendezés. A 19 csap állításával többféle sebesség szabályozható.

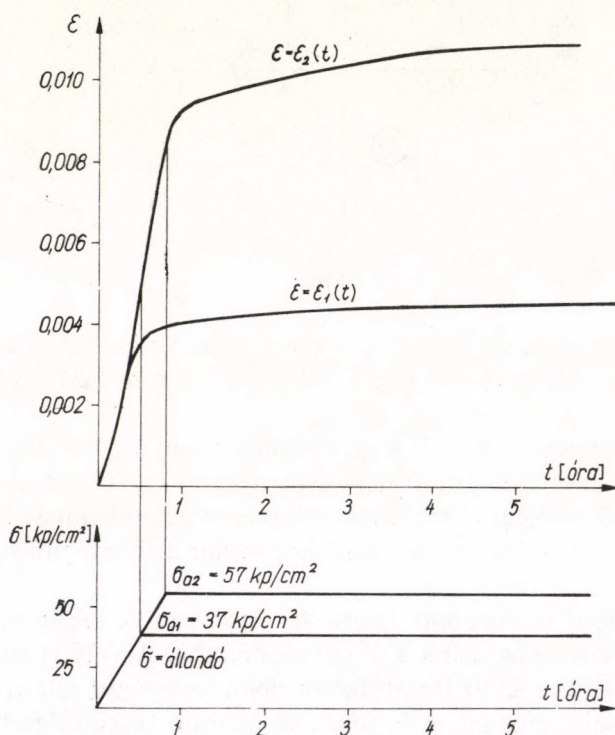
Az előírt  $\sigma_a$  kezdő terhelés elérésével a terhelést nem változtatjuk. A súlyerő állandósága biztosítja az állandó terhelést a próbatesten. A

folyadék mennyiségének megválasztásával a terhelés nagyságát tetszőlegesen beállíthatjuk.

A mérés lényegében hosszváltozásmérés, amely a mérőórák időnkénti leolvasásával oldható meg.

A három mérőóra biztosítja egyrészt annak ellenőrzését, hogy a terhelőlapok párhuzamosan mozdnak-e el, tehát egyenletes az alakváltozás a nyomóerő irányára nézve; másrészt leolvasási kontrollt is szolgáltatnak, mivel rendelkezésre áll három mérési adat esetenként.

A mérés a terhelés kezdeti szakaszában, az állandó terhelés beálltáig igen sűrűn történik (szükség szerint 10–30 mp-ként). Majd nagyobb időközökben a nagyobb alakváltozási sebességek szakaszán (általában 2~5 percenként). Végül a lapos szakaszon ritkán (anyagtól függően 1/4~1



21. ábra. Különböző terhelési szintig végzett kúszásvizsgálat (a próbatest anyaga: agyagos márga (Tatabányai Szénbányák VI. Bányauzem), a próbatest mérete:  $\phi 18 \times 30$  mm, feszültségváltozási sebesség:  $70 \text{ kp/cm}^2$ , óra).

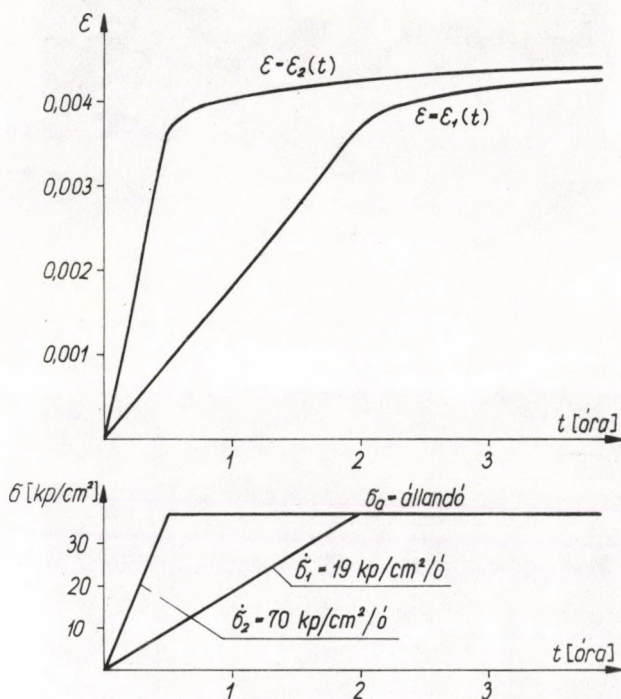


óránként).

Egyidejűleg 5 mérőberendezés van üzemben, hogy az igen nagyszámú mérést végre lehessen hajtani.

A 21. ábrán feltüntetettünk néhány mérési görbét. Itt azonos sebességgel vittük fel a terhelést. A két görbe azonban két különböző  $\sigma_a$  alapterheléshez tartozik.

A 22. ábrán berajzolt görbék viszont azonos  $\sigma_a$  alapterheléshez, de különböző feszültségváltozási sebességhez tartoznak.

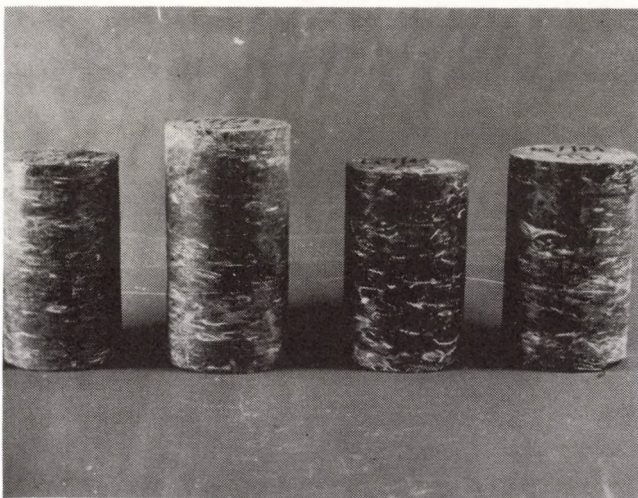


22. ábra. Különböző feszültségváltozási sebességgel végzett kúszásvizsgálat (a próbatest anyaga: agyagos márga (Tatabányai Szénbányák VI. Bányaüzem), a próbatest mérete:  $\phi 18 \times 30$  mm, a maximális terhelés:  $37 \text{ kp/cm}^2$ )

A 23. ábrán a kőzetpróbatest kézi kialakítását mutatjuk be, míg a 24. ábrán a kézzel és géppel kialakított próbatestek hasonlíthatók össze. A 25. ábra fűrómagból koronafűróval kiforgácsolt próbatestet mutat be.



23. ábra



24. ábra. Kézzel (baloldali kettő) és géppel (jobboldali kettő) kialakított próbatestek sekélytengeri agyagmárgából (Nagyegyháza).





25. ábra.

### 3.4 A kiértékelés

A keresett anyagállandók értékét a 21–22. ábrán látható kísérlet diszkrét időpontban felvett összetartozó

$$\begin{aligned} \epsilon_i, t_i & \quad i = 0, 1, \dots, a-1 \\ \epsilon_a, t_a & \\ \epsilon_j, t_j & \quad j = a+1, \dots, n \end{aligned}$$

deformáció és időértékek alapján határozhatjuk meg. A *standard* közeg esetében

ha  $\sigma = q_0 = \text{konstans}$

$$\epsilon = \frac{q_0}{E} \left[ t - \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) \left( 1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t} \right) \right],$$

ha  $\sigma = \sigma_a = q_o t_o = \text{konstans}$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\dot{q}_o}{E} t_o - \left( \frac{\dot{q}_o t_o}{E} - \epsilon_a \right) e^{-\frac{E}{\lambda} (t - t_o)} = \\ &= \frac{\dot{q}_o}{E} \left[ t_o - \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) (1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t_o}) e^{-\frac{E}{\lambda} (t - t_o)} \right] \end{aligned}$$

Ekkor az eltérések négyzetösszegét reprezentáló függvény

$$\begin{aligned} \Delta \equiv \sum_i \left\{ \epsilon_i - \frac{q_o}{E} \left[ t_i - \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) (1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t_i}) \right] \right\} \\ + \sum_j \left\{ \epsilon_j - \frac{q_o}{E} \left[ t_o - \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) (1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t_o}) e^{-\frac{E}{\lambda} (t_j - t_o)} \right] \right\} \end{aligned}$$

formában írható fel, s a keresett közetállandók szélső értékszámítás útján, elektronikus számítógép felhasználásával a

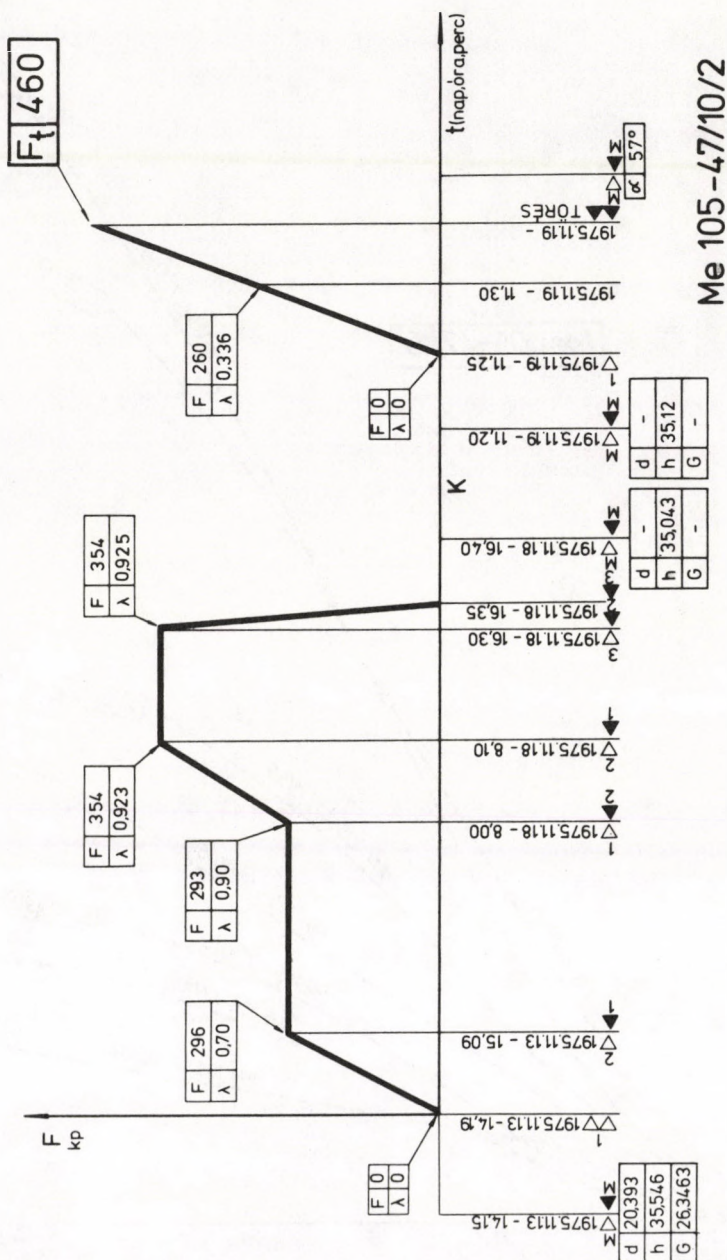
$$\frac{\partial \Delta}{\partial E} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta} = 0$$

egyenletből iterációs úton meghatározhatók.

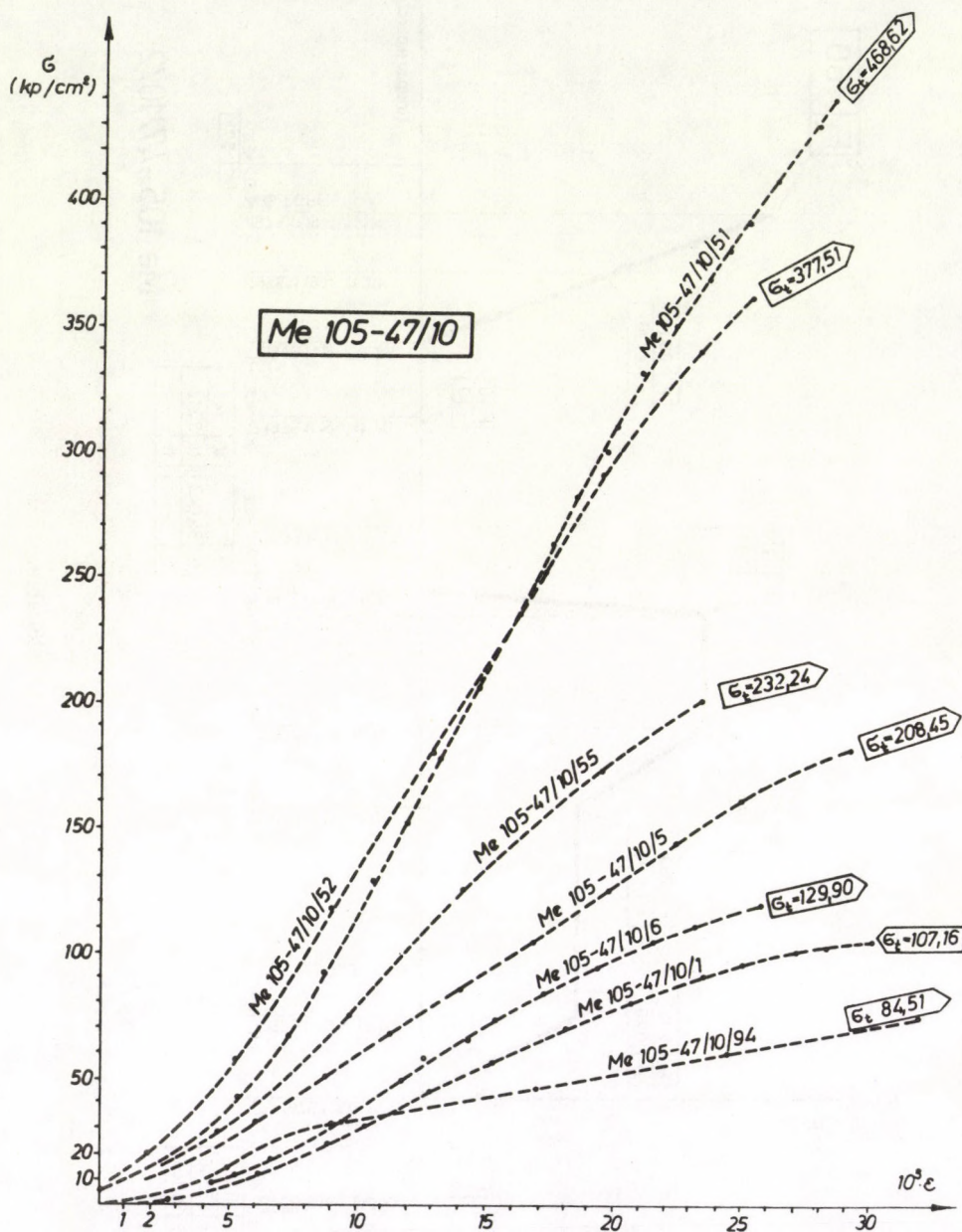
### 3.5 Néhány kísérlet bemutatása

A következő ábraszorozat a nagygyházi medencében lemélyített Me 105, Me 114 és N60 számú kutatófurások egyes kijelölt magmin-táiból készített próbatesteken lefolytatott kísérleteket mutatja be.





26. ábra.



27. ábra. Feszültség-deformáció görbék



A 26. ábra ( $H = 288,10\text{--}288,40\text{ m}$ ) sekélytengeri agyagmárga próbatesten végzett kísérletet mutatja be, amely egyenletes terhelésből, majd kúszásból, további terhelésből, kúszásból és leterhelésből áll, majd egy tönkremenetelig tartó fokozatos terhelést mutat. Az ábrán alkalmazott jelölések a következők:

$F$  – terhelő erők [kp],

$G$  – a próbatest súlya [p],

$d$  – a próbatest átmérője [mm],

$h$  – a próbatest magassága [mm],

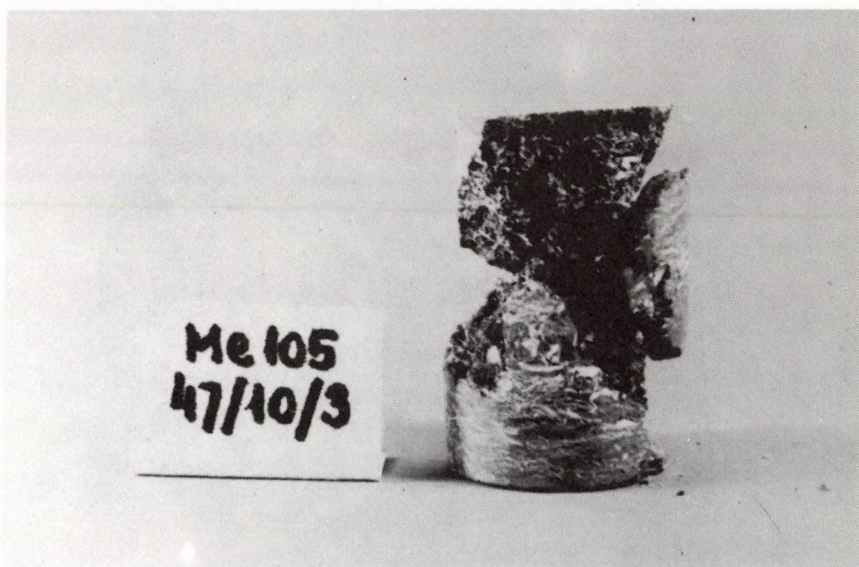
$\lambda$  – a próbatest összenyomódása, magasságcsökkenése [mm],

A 27. ábra a különböző mintákon felvett  $\sigma - \epsilon$  görbéket mutatja.

A 28. ábrán az összetört próbatestet láthatjuk.

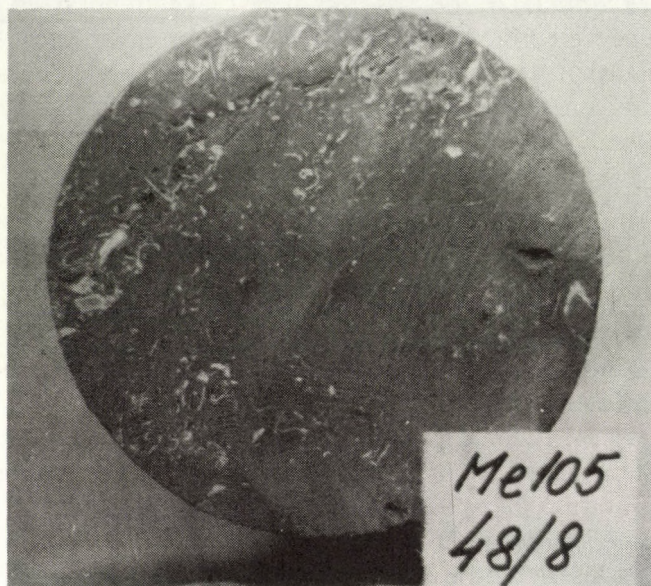
A 29–34. ábrák a ( $H = 303,90\text{--}304,15\text{ m}$ ) sekélytengeri agyag próbatesten végzett kísérlet eredményei illetve próbamintái közül néhányat mutatnak be.

A 35–38. ábrák a ( $H = 419,70\text{--}420,10\text{ m}$ ) édesvizi mészkő próbatestet és kísérleteit, a 39–41. ábrák a ( $H = 450,30\text{--}450,90\text{ m}$ ) édesvizi mészkő próbatestet és kísérleteit mutatják.

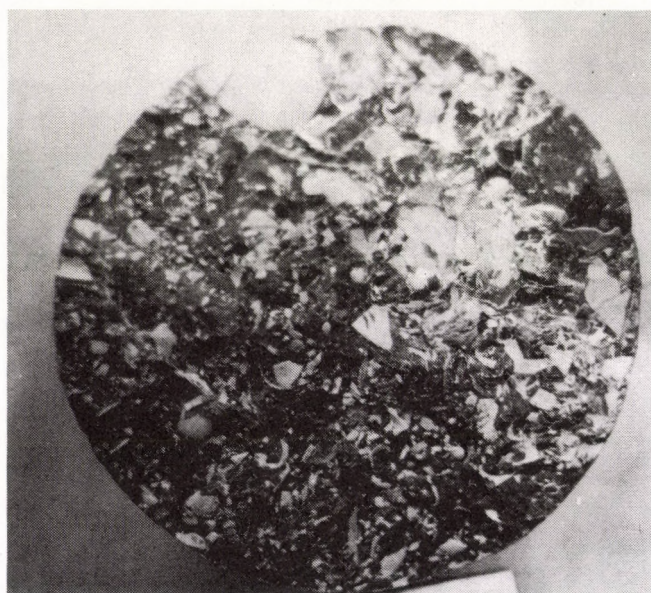


28. ábra. Sekélytengeri agyagmárga próbatest egytengelyű törés után



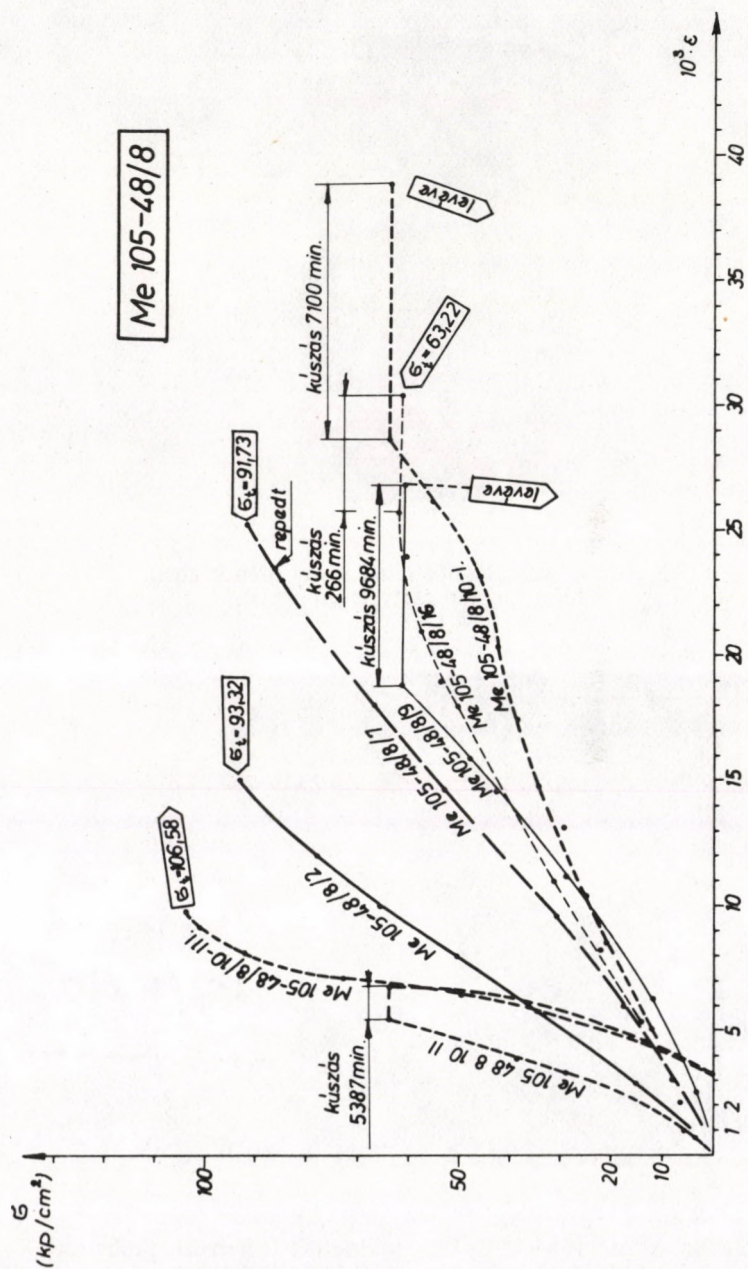


29. ábra



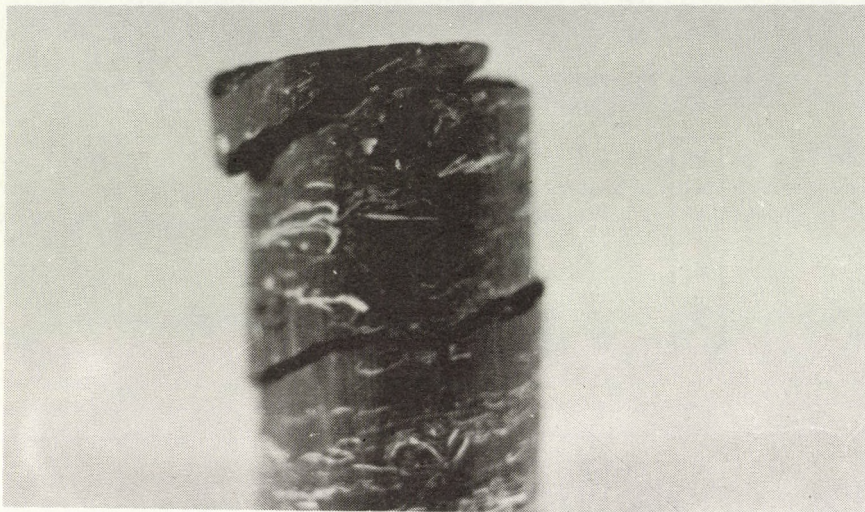
30. ábra



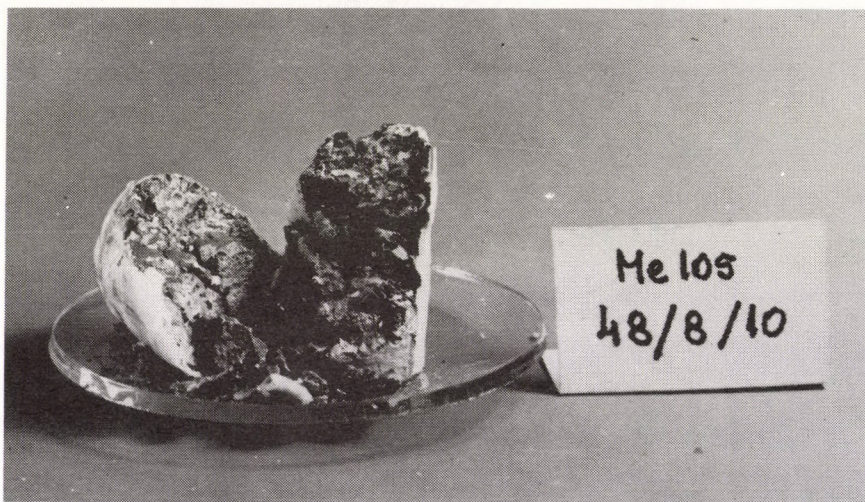


31. ábra. A kísérlet során felvett  $\sigma$ - $\epsilon$  görbék



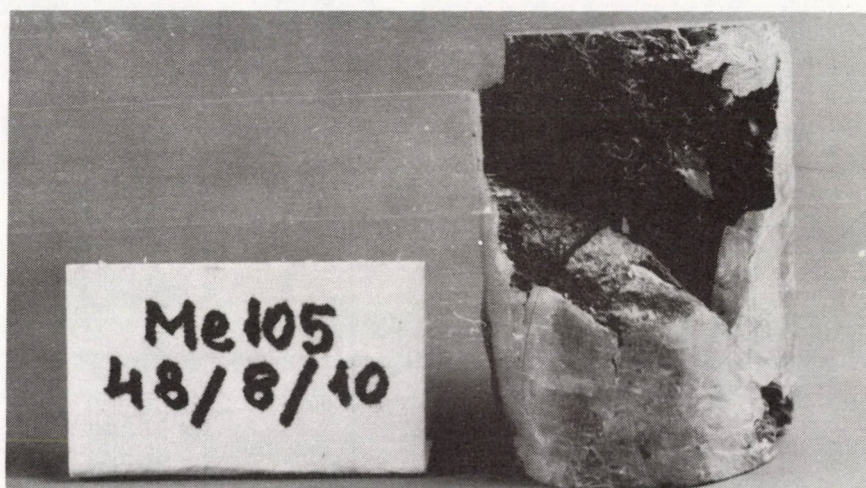


32. ábra. A készülékből való kivétel után kézben, réteg mentén szétvált próbatest.

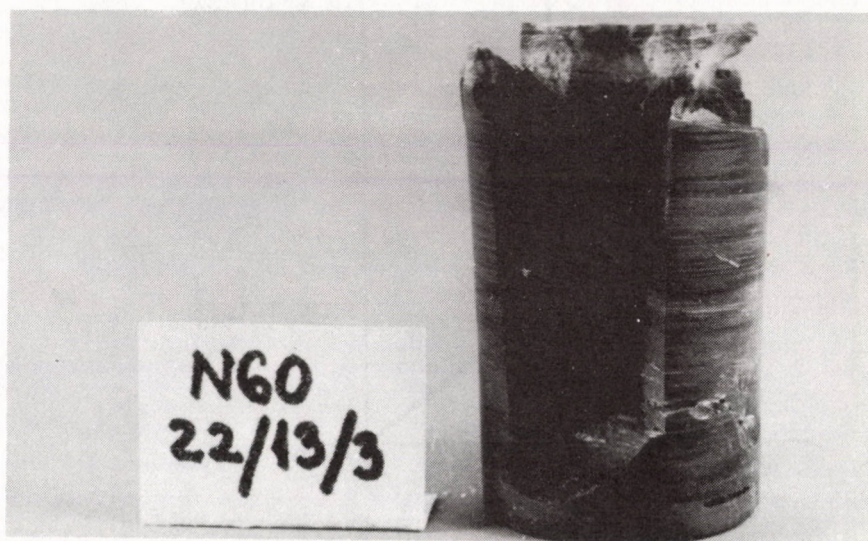


33. ábra. Az Me 105—48/8/10.sz. kísérletnél felhasznált próbatest többszöri terhelésre bekövetkezett törés után



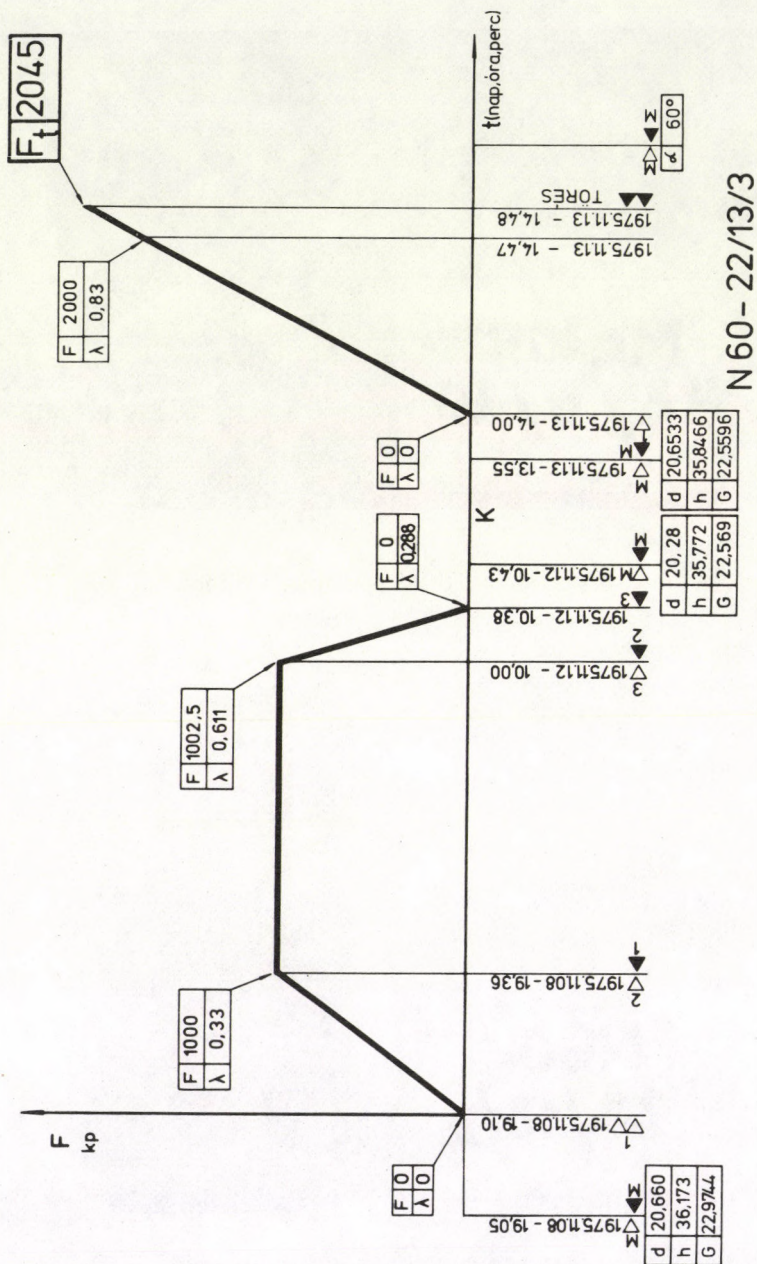


34. ábra. A 33. ábrán látható próbatest a törőgépből történt kivétel után



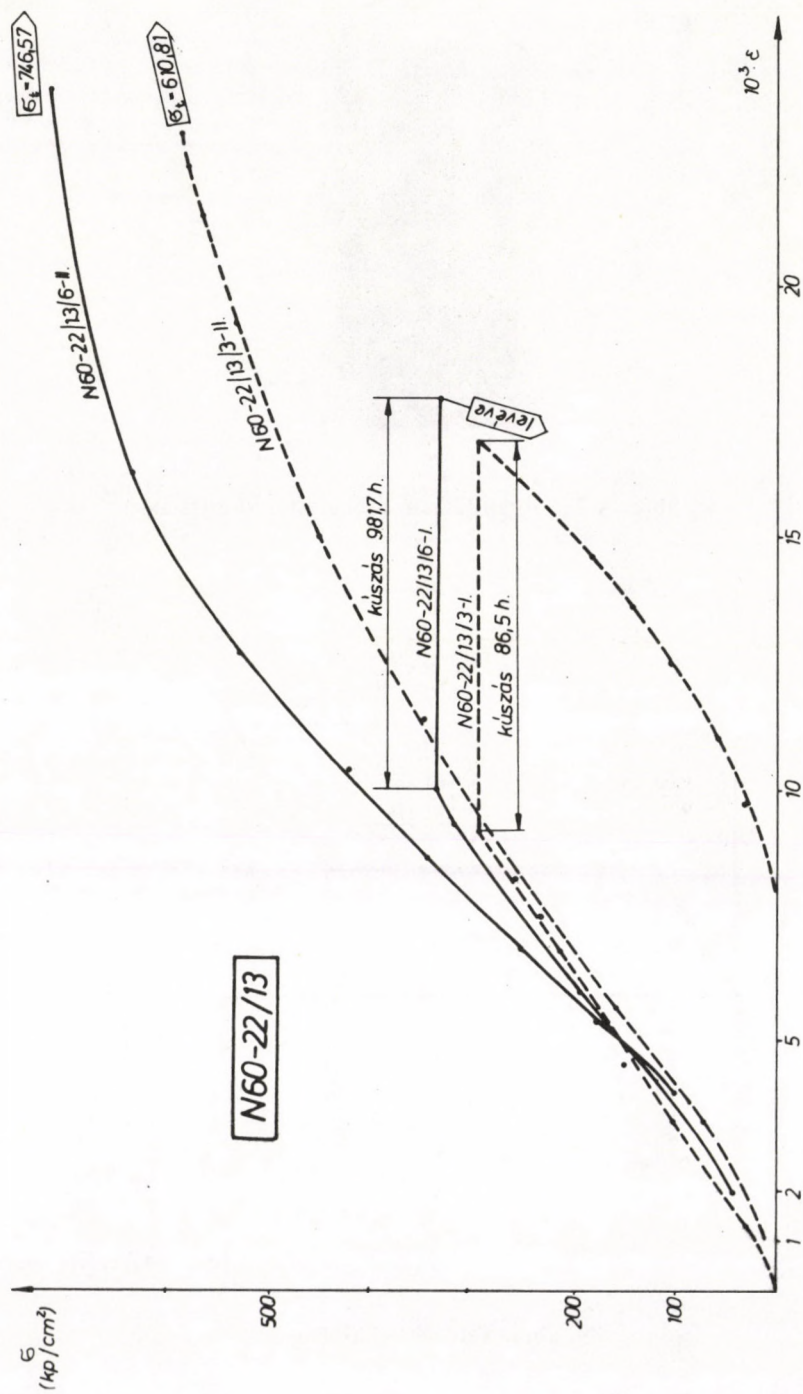
37. ábra. Édesvizi mészkő próbatest kúszás után bekövetkezett törése



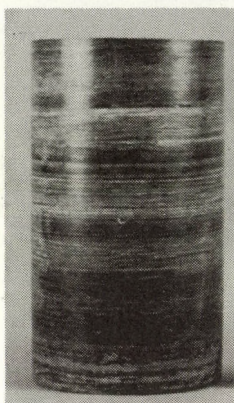


35. ábra. Kúszás és törővizsgálat terhelés - idő görbéje

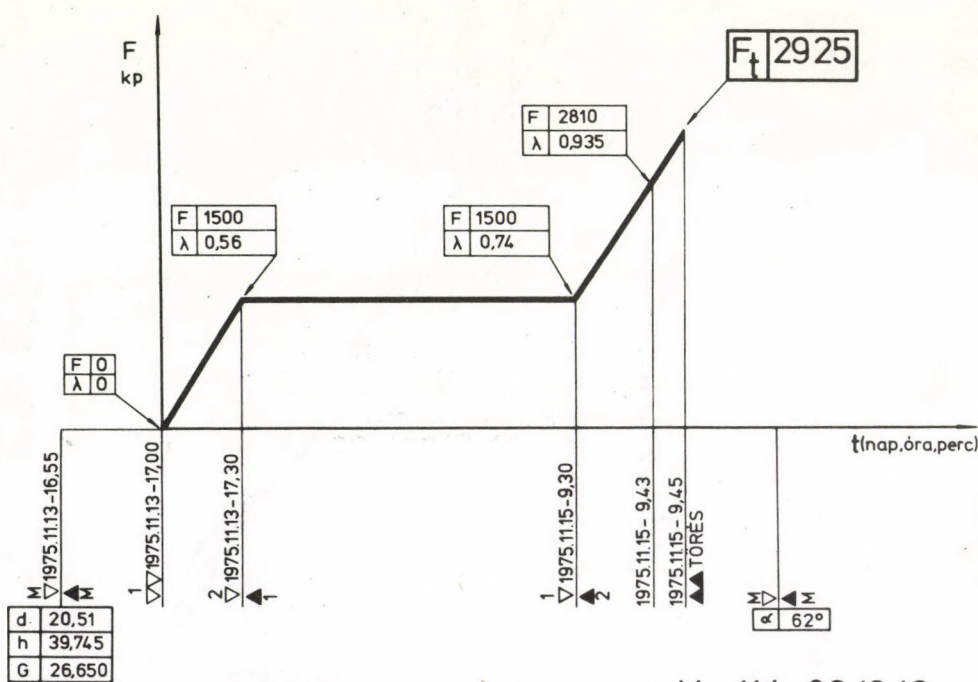




36. ábra. A 35. ábrán látható kísérlet feszültség – deformáció görbéje



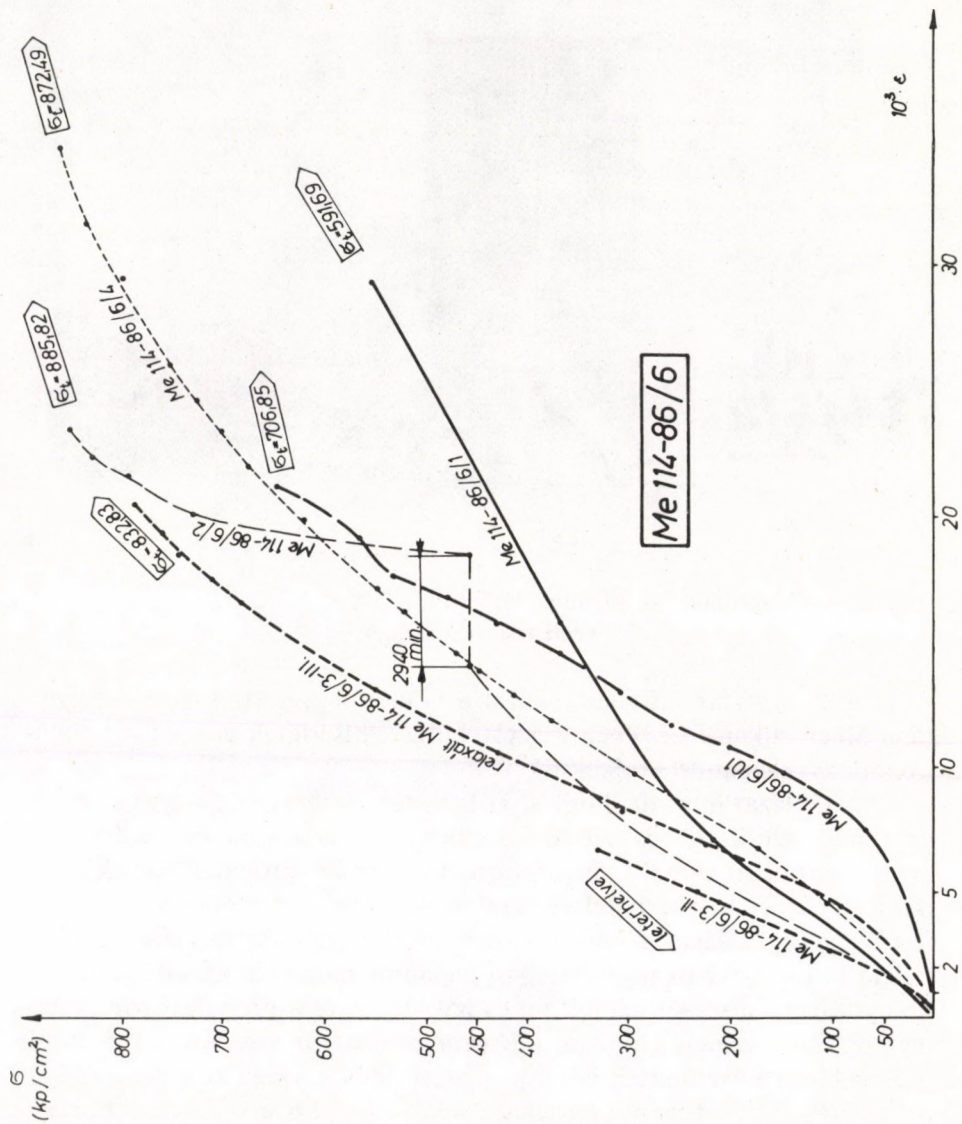
38. ábra. A 37. ábrán látható próbatest a kísérlet előtt



Me 114-86/6/2

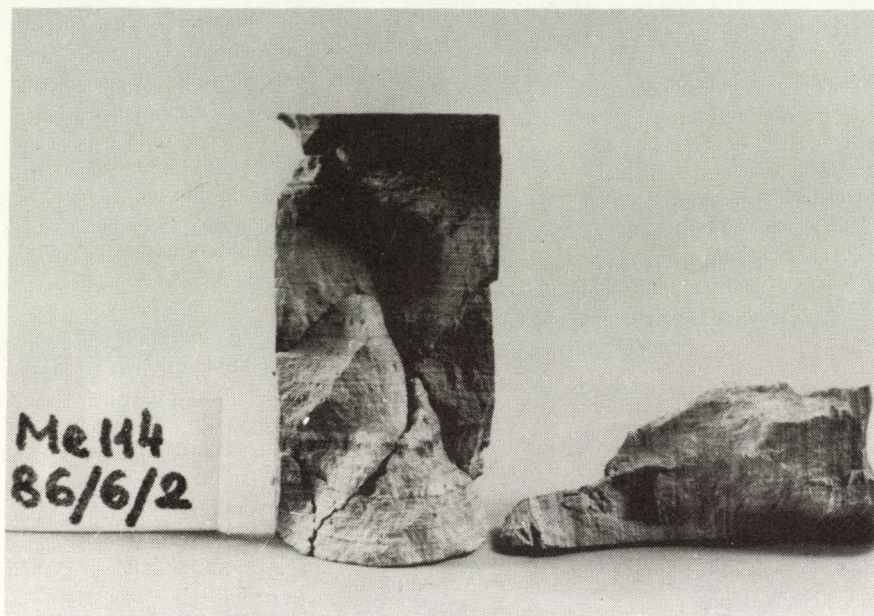
39. ábra. Terhelés - idő diagram





40. ábra. Feszültség – deformáció összefüggés





41. ábra. A 39. ábrán látható kísérlethez felhasznált próbatest a törés után

A 2. táblázat ad tájékoztatást a Gödöllői Agrártudományi Egyetem Mechanikai Tanszékén végzett kúszási kísérletek alapján meghatározott anyagállandó értékekről.

A táblázat mutatja, hogy a próbatestek – illetve a fúrómagminták – igen nagy szerkezeti és szilárdsági inhomogenitása a mérési eredmények nagy szóródását okozta, még fokozottan gondos próbatest kialakítás, konzerválás és méréskivitelezés esetén is. A mészkőminták pl. viszonylag nagy törőszilárdság mellett, kitüntetett – az anizotrópiájának megfelelő – irányokban nagy hasadási hajlamot mutattak. A kitüntetett irányokban csúszások léptek fel és így jött létre a próbatest tönkremenetele. Sok esetben azonban – Huszár professzor kísérleteinél – előbb a hasadások következtek be, a próbatest állékonysága kevésbé csökkent és a törés csak a további terhelésnövekedéskor következett be. Ezzel szemben pl. az N 60–22/13 jelű édesvizi mészkőminták feltűnően nagy rugalmas energiatároló képességről tettek tanúbizonyságot. Ezeknél a tárolt potenciális energia a törés megindulása után azonnal több hasadá-



2. táblázat

A próbatest jele	Anyaga	$E[\text{kp/cm}^2]$	$\lambda[\text{kp,ó/cm}^2]$	$\vartheta[^\circ]$
Me 105-47/10/2	Sekélytengeri agyagnárga	36 856	72 266	17,108
Me 105-47/10/3		29 668	4 578	1,100
Me 105-47/10/10		31 963	4 932	1,061
Me 105-47/11/3		43 391	85 080	15,190
Me 105-48/8/9	Sekélytengeri agyag	23 026	23 985	7,869
Me 105-48/8/10		17 017	17 725	8,276
N 60-22/13/2	Édesvizi mészkő	20 153	395 150	14,990
N 60-22/13/3		18 280	358 430	11,947
Me 114-86/6/2	Édesvizi mészkő	25 450	39 275	11,891

si felület mentén a próbatestet szinte szétrobbantotta.

A kísérletek azt mutatják, hogy a mérési eredmények felhasználásához nagyszámú kísérletre van szükség, hogy megfelelő megbízhatósági szinthez tartozó adatokat kaphassunk.



## 4. FEJEZET

# LABORATÓRIUMI EGYTENGELYŰ NYOMÓKISÉRLETEK

### 4.1 Előzetes megjegyzések

Az előző két fejezetben modellanalízis keretében vizsgáltuk reológiai idealizált modellek igénybevétel hatására jelentkező egytengelyű deformációs tulajdonságainak jellegzetességeit. A választott anyagegyenlet-től függően a deformáció—lefutásának számos változata van, amelyek valamennyien demonstrálták, hogy az alapvető deformációs állandók ( $E$  és  $m$ ) csak reológiai jelenségektől mentes médiumban, vagy csak extrém esetekben számíthatók közvetlenül az összetartozó feszültség, illetve deformációs elemek értékeiből.

Kőzeteken végzett legtöbb terhelés-deformálódás irányú anyagvizsgálati eredmény arra mutat, hogy relatíve rövid vizsgálati időtartam alatt is már jól konstatálható időfolyamatok, illetve azoknak a mért értékekben mutatkozó hatásai „zavarják” meg az ideális (a lineárisan rugalmas) jelleggörbéket és teszik kérdésessé kőzetek mechanikai jellemzői (állandói) megállapítható értékének realitását.

Két kérdést vethetünk fel:

a) Melyik idealizált (gondolati) modellel közelítsük meg azt a tényanyagot, amelynek terhelés—deformálódás összefüggését összetartozó mért értékpárokkal tudjuk jellemezni?

b) A mérési adatok ismeretében hogyan határozhatók meg a tényanyag, illetve az azt legjobban közelítő idealizált modell reológiai jellemzői?

Jelen fejezetben az a) és b) kérdésre egy már ismertetett idealizált modell feltételezésével keresünk választ.

Annak érdekében, hogy köztettömbök várható viselkedését, szerkezetekre való hatását számíthassuk, illetve hogy a bennük bekövetkező feszültségváltozásra és deformálódásra információkat kaphassunk, szükségünk van a kőzet reológiai jellemzőinek (rugalmas modulus, *Poisson*-féle szám, viszkozitási tényező, relaxációs idő) ismeretére. A jellemzők

meghatározása tömbökön (bányabeli in-situ mérések), illetve laboratóriumi mintatesteken történhet.

A tömbökön végrehajtott vizsgálatok eredményeképpen az egy helyen kapott mérési adatok a környezet integrált hatását tükrözik és ezért relatíve mértékadóbbnak tekintendők, mint mintatesteken végzett kísérletek észlelési eredményei, mert ez utóbbiaknál a környezet hatását helyettesíthetőnek tartjuk a próbatest nagyságú minta hatásával.

Jelen fejezetünk laboratóriumi mintatesteken végzett terhelési kísérletek elemzésére és egyszerű kiértékelésére irányul. Ilyenkor módunkban áll az igénybevételek szélesebb körén belül szabadon megválasztani a kezdeti és kerületi feltételeket s ezáltal az anyagállandók egyikét—másikát közvetlenül leolvasni a terhelés—nyúlás diagramból minden különösebb kiértékelés nélkül.

## 4.2 Homogén—lineáris állapotegyenletű közegek

Ha abból a feltevésből indulunk ki, hogy a közet *homogén-lineáris* állapotegyenlettel jellemezhető, vagyis a feszültségi és deformációs deviatortenzorok, valamint a  $\epsilon_0$  indexszel jelzett gömbtenzorok között homogén-lineáris a függvénykapcsolat, akkor a vizsgált közetanyaghoz, illetve a mérési adatokhoz, az alább felsorolt — és legjobb közelítést adó — idealizált reológiai modellek valamelyikét kell hozzárendelnünk:

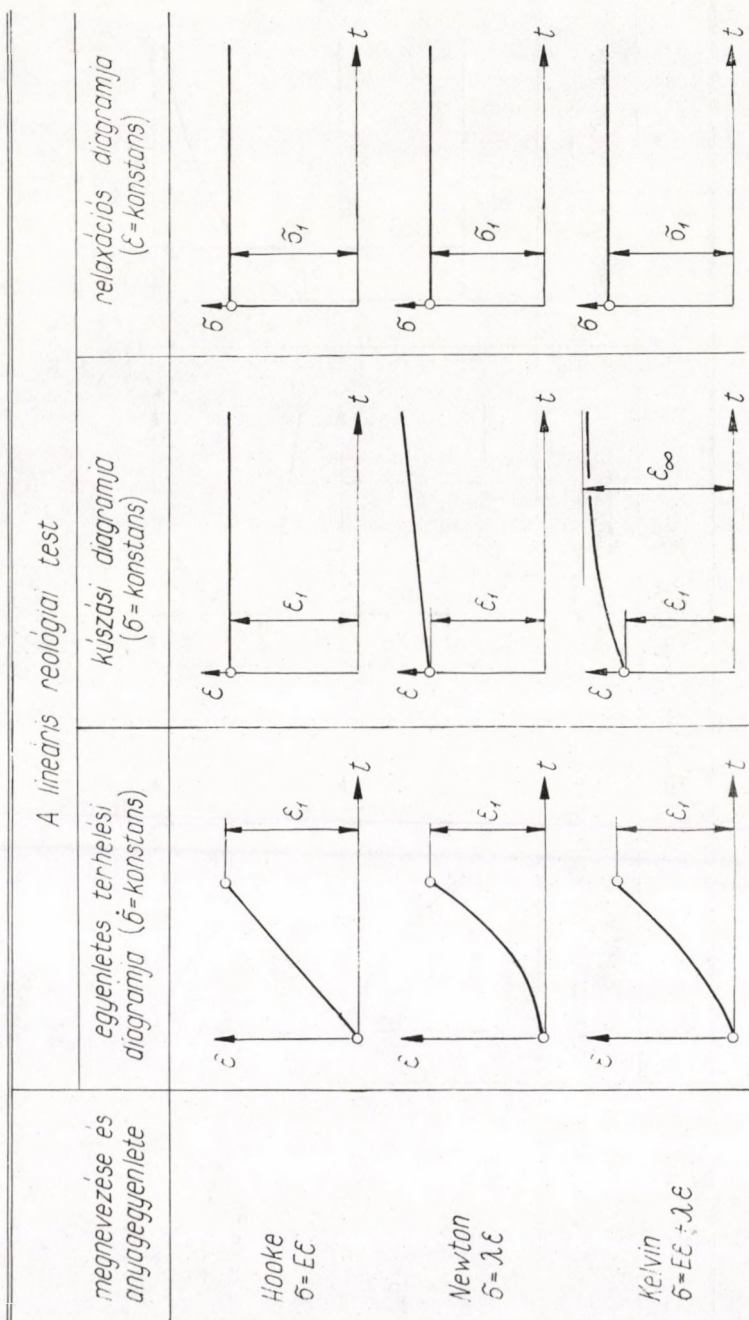
$T = 2GE$	$T_0 = 3KE_0$	[ Hooke test ]
$T = 2\eta \dot{E}$	$T_0 = 3K'E_0$	[ Newton test ]
$T = 2GE + 2\eta \dot{E}$	$T_0 = 3KE_0$	[ Kelvin test ]
$T = 2\eta \dot{E} - \tau \dot{T}$	$T_0 = 3KE_0$	[ Maxwell test ]
$T = 2GE + 2\eta \dot{E} - \tau \dot{T}$	$T_0 = 3KE_0$	[ Standard test ]

## 4.3 Egytengelyű nyomókísérletek

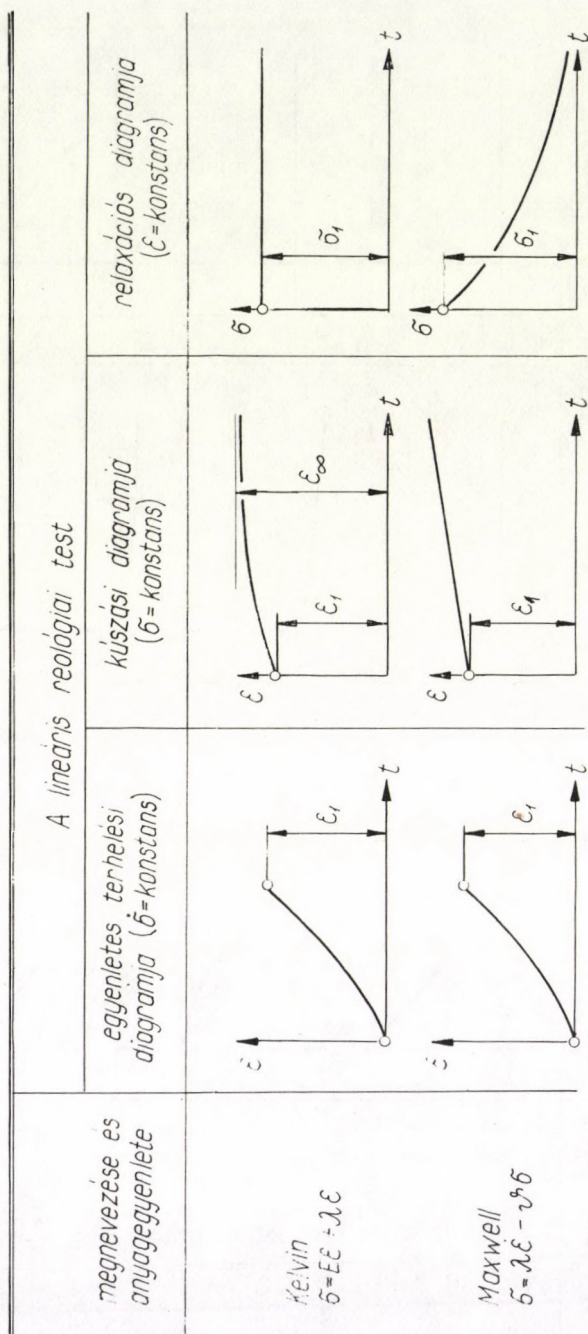
Laboratóriumban legegyszerűbben kivitelezhető kísérletek az alábbiak:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \text{konstans} \quad [\text{arányos terhelési próba}], \\ \sigma &= \text{konstans} \quad [\text{kúszási próba}], \\ \epsilon &= \text{konstans} \quad [\text{relaxációs próba}], \end{aligned}$$





42/a. ábra. A különböző egyszerű reológiai modellek arányos terhelési, kúszási és relaxációs görbéi.



42/b. ábra. A különböző egyszerű reológiai modellek arányos terhelési, kúszási és relaxációs görbéi.



s ezért a következőkben ezekre korlátozzuk vizsgálatainkat.

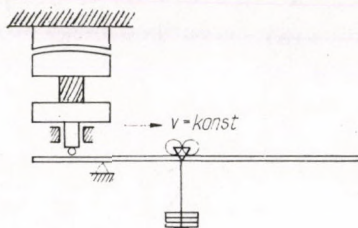
A 42/a., b. ábrán a különböző elvi modellekhez tartozó vizsgálatok eredményeit tüntettük fel, s az ábrából kiolvasható, hogy a *kúszási* és *relaxációs* görbe alapján a közetet leginkább közelítő idealizált modell – a homogén-lineáris testek köréből – egyértelműen kiválasztható.

#### 4.4 A kísérletek megvalósítása

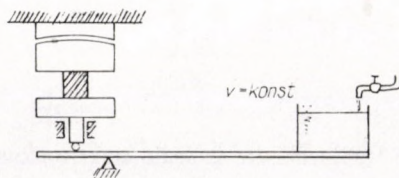
Az alábbiakban vázlatosan áttekintjük az egyes vizsgálatokhoz szükséges terhelő berendezéseket.

##### 4.41 Arányos terhelési próba

Az egyenletes sebességű terhelésátvitel megvalósítása bármilyen nyomógépen lehetséges, amelynél a terhelést nem szakaszosan – pl. a terhelő tányérra egyenlő nagyságú súlyok, egyenlő időközönkénti felrakásával – hanem folyamatosan meg tudjuk valósítani. Ennek a legváltozatosabb módszerei lehetségesek. A 43. ábrán látható elvi vázlaton az egyenletes feszültségváltozási sebességet adott súlynak egyenletes sebességű mozgásával lehet biztosítani. A 44. ábrán egyenletes sebességgel beömlő folyadék súlya eredményezi a kívánt terhelést.



43. ábra



44. ábra

#### 4.42 Kúszási próba

Adott intenzitással stabilizált terhelés a használatos berendezésekkel általában megvalósítható: súlyterhelés esetén e kívánalom az állandó súllyal; ingakaros terhelés mellett konstans ingakitéréssel, hidraulikus terhelés esetén a folyadéknyomás stabilizálásával megoldott. Problémát a kísérlet pontosságigényével adott szabályozóberendezés kívánalma jelenthet.

#### 4.43 Relaxációs próba

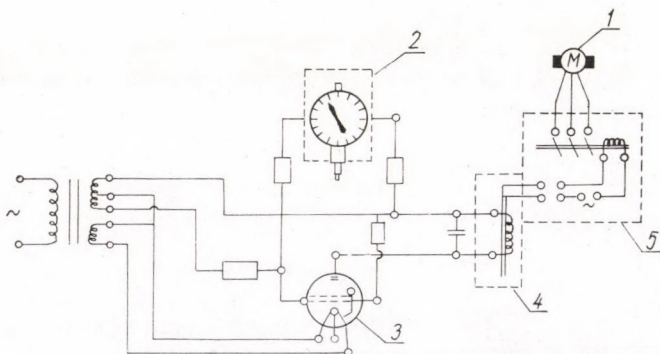
A kísérletnél egy meghatározott  $\epsilon_1$  nyúlásérték elérése után a további alakváltozásokat meggátoljuk és a terhelést fokozatosan úgy csökkentjük – miközben regisztráljuk a

$$\sigma = f(t)$$

időbeli változást –, hogy a deformáció a kívánt

$$\epsilon = \epsilon_1 = \text{konstans}$$

értéken maradjon. Ehhez a kísérlethez *Klecsek*-féle elektronikus vezérlő használható fel, amelyet a 45. ábra mutat. Az  $\epsilon_1$  kezdeti deformáció érték elérése után a geometriai erősítő 2 érintkezői rövidre záródnak. Ha a deformáció a kívánt értéktől eltér (a két pofa közötti távolság kb. 0,0002 ... 0,0005 mm nagyságrendben megváltozik) az érintkezők ki-



45. ábra. A deformáció stabilizálására szolgáló elektronikus távadó (1- terhelést mozgató villanymotor, 2- geometriai erősítő, 3- elektroncső, 4- relé, 5- érintkező)



nyílnak és a távadó elektromechanikus rendszere jelzést kap a 2 erősítőtől és a 3 elektroncső áramkörét zárja. Az elektroncső anód áramkörében található 4 relé zárja az érintkezőket, amire bekapcsolódik az 5 rövidrezáró gerjesztése s ez az 1 motor beindítását okozza, amely a terhelés csökkenését végzi. Az  $\epsilon_1$  érték elérésével a rendszer újból leáll. A relaxométer folyamatos, megszakítás nélküli munkája két automatikusan vezérelt és egymástól független trafóállomásról történő táplálással garantálható.

#### 4.5 Anyagegyenlet meghatározása

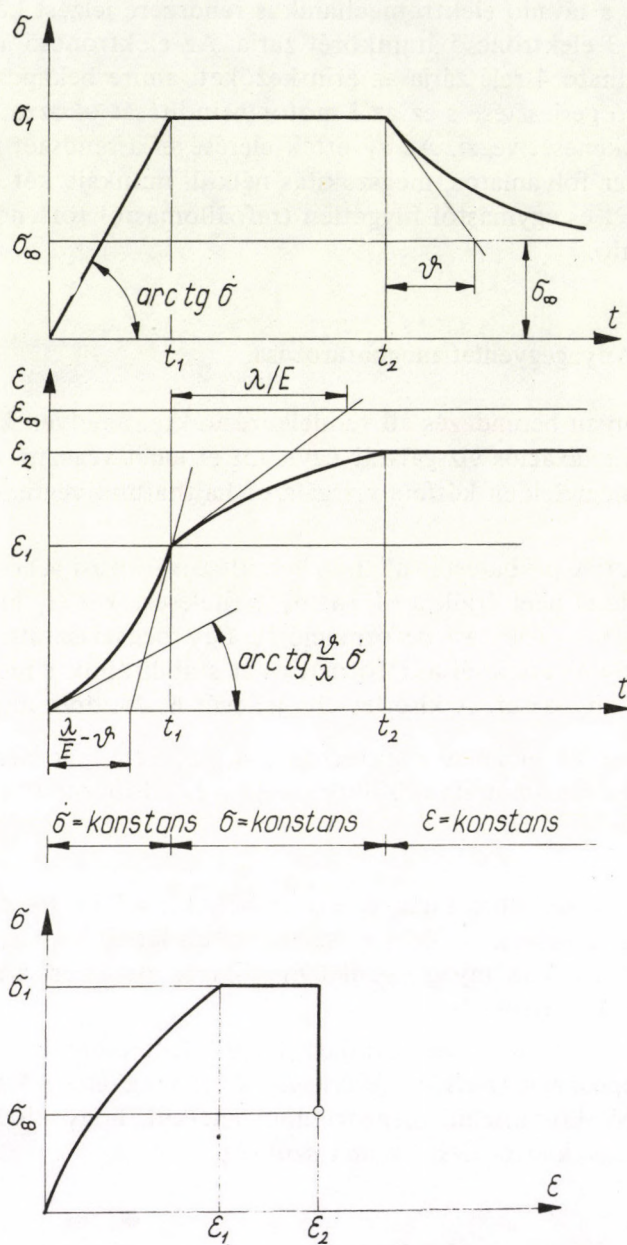
Ha olyan berendezés áll rendelkezésünkre, amelyen közetminták kúszási és relaxációs vizsgálatát egyaránt el lehet végezni, akkor a sorrendnek megfelelően kétféle vizsgálatot hajthatunk végre.

*1. eset:* A próbatestet állandó feszültségváltozási sebességgel terheljük, míg el nem érjük a kívánt  $\sigma_1$  terheléértéket ( $t_1$  időpont) és regisztráljuk a próbatest deformációját. Egy megválasztott  $t_2$  időpontban jelentkező értéknél a deformációkat stabilizáljuk s regisztráljuk a feszültség enyvedését. A kísérlet elvi jellegét a 46. ábra mutatja.

*2. eset:* Az előzővel ellentétben a  $\sigma_1$ ,  $\epsilon_1$  értékpár elérése után először a deformációt stabilizáljuk, majd a  $t_2$  időpontban a terhelést (47. ábra).

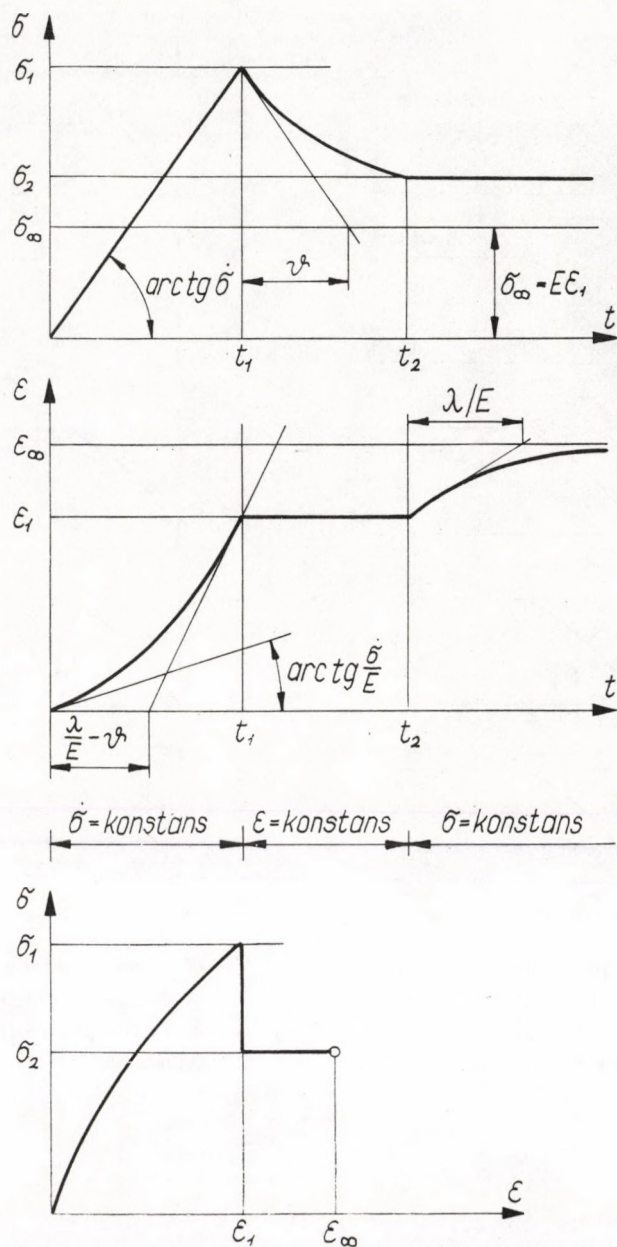
A két kísérlethez tartozó elvi görbéket a 48. és 49. ábra mutatja különböző reológiai modellek esetén. Innen látható, hogy a kapott  $\sigma$ - $\epsilon$  diagramból az anyagegyenlet megállapítható, mert a reprezentáló modell kiválasztható.

A 48.-49. ábrák bemutatják, hogy adott esetekben az anyagegyenlet típusának (Kelvin-, Maxwell-, stb.) meghatározására a regisztrátumokból közvetlenül megtörténhet anélkül, hogy különösebb számításra vagy kiértékelésre volna szükség.

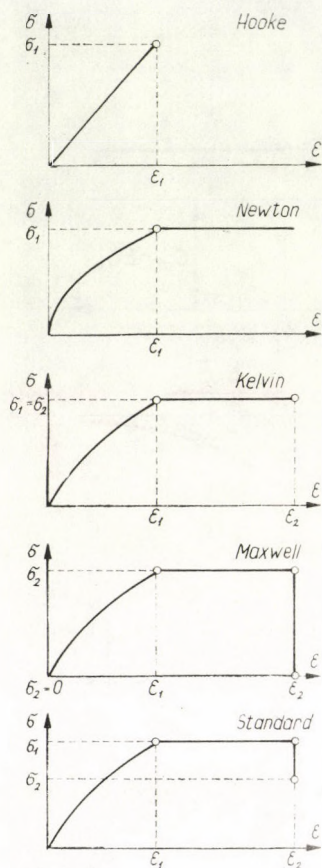


46. ábra. Arányos terhelési-kúszási-relaxációs próba

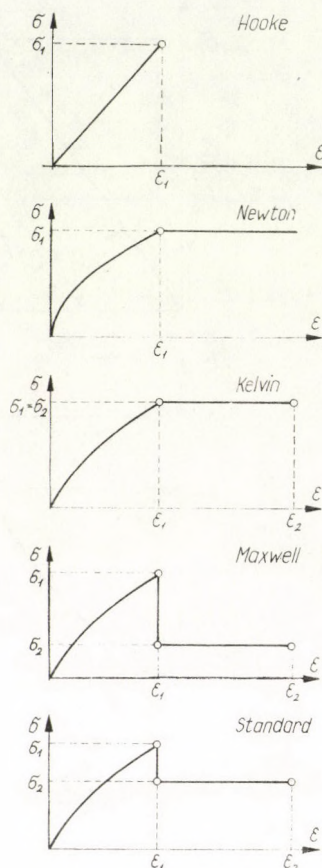




47. ábra. Arányos terhelési-kúszási-relaxációs próba



48. ábra. Arányos terhelési-kúszási-relaxációs próba különböző reológiai modellek esetén



49. ábra. Arányos terhelési-relaxációs-kúszási próba különböző reológiai modellek esetén



#### 4.6 Az anyagállandók közvetlen meghatározása

Az alábbiakban a kísérleti program olyan összeállításával foglalkozunk, amelyből közvetlenül meghatározhatók a reológiai állandók értékei. A levezetéseket a *standard* modellre vonatkozóan végezzük el, mert belőle az egyes állandók zérussá tételével automatikusan adódnak az egyszerűbb (*Newton*, *Kelvin*, stb.) modellre vonatkozó eredmények is.

Jelöljük a próbatest tengelyirányú feszültségét  $\sigma$ -val és a hozzátartozó fajlagos rövidülést  $\epsilon$ -nal. A terhelésre merőleges síkban a fajlagos nyúlások az egytengelyű feszültségállapotból következően egyenlők lesznek, s ezeket jelöljük  $\epsilon_v$ -vel.

A

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{E} + 2\eta\dot{\mathbf{E}} - \tau\dot{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{T}_0 = 3K\mathbf{E}_0$$

tenzoregyenlet, egytengelyű feszültségállapot esetén az alábbi két skaláregyenletté redukálható:

$$\sigma = E\epsilon + \lambda\dot{\epsilon} - \vartheta\dot{\sigma}, \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{Em}{m-2}(\epsilon + 2\epsilon_v). \quad (2)$$

#### 4.61 Arányos terhelési próba

$$\dot{\sigma} = \dot{\epsilon} = \text{konstans}$$

állandó feszültségváltozási sebességet feltételezve a

$$\sigma \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{és} \quad \epsilon \Big|_{t=0} = 0$$

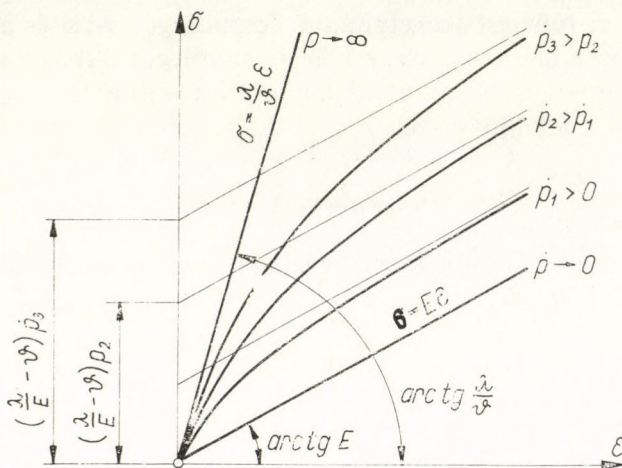
kezdeti feltételek figyelembevételével az (1) differenciálegyenletből az

$$\epsilon = \frac{1}{E} \left[ \sigma - \dot{\epsilon} \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) (1 - \exp \left\{ - \frac{E}{\lambda} \frac{\sigma}{\dot{\epsilon}} \right\}) \right] \quad (3)$$

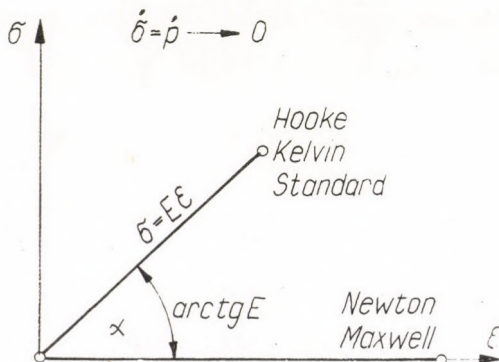
alakváltozás-feszültség összefüggés vezethető le (50. ábra). Innen látható, hogy igen lassú terhelésselvitel esetén, ha

$$\dot{p} \rightarrow 0,$$

a modell úgy viselkedik, mint a lineárisan rugalmas *Hooke* test. Az 51. ábrán tüntettük fel az igen lassú terhelésfelvitel esetén a várható feszültség–deformáció összefüggéseket a különböző egyszerű elvi reológiai modellek esetében.



50. ábra. A standard modell feszültség–deformáció összefüggése állandó feszültségváltozási sebesség esetén



51. ábra.

Ha meg lehet valósítani az igen gyors terhelésfelvitelt:

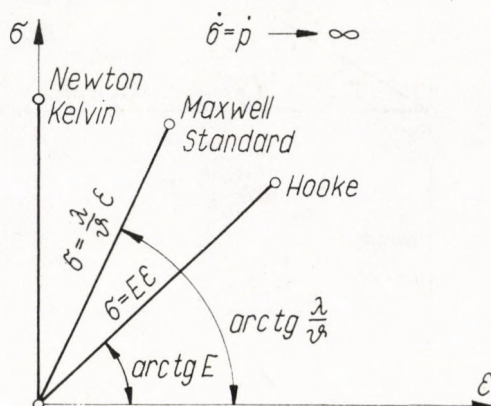
$$\dot{p} \rightarrow \infty$$



akkor a várható eredmények az 52. ábrának megfelelően alakulhatnak. A két ábra összevetéséből a közetet legjobban közelítő elvi reológiai modell kiválasztható lenne, s az

$$E \text{ valamint } \frac{\lambda}{\vartheta}$$

értéke közvetlenül leolvasható.



52. ábra.

Az „igen lassú”, illetve a végtelennek tekinthető „igen gyors” terhelésssebesség a vizsgált anyagtól függ, ezért előzetes, különböző terhelési sebességekkel végzett tájékozódó kísérletek döntik el, hogy az adott anyagnál szükséges  $\dot{p} \rightarrow 0$ , illetve  $\dot{p} \rightarrow \infty$  szélső terhelésssebességek az adott berendezésnél, vagy egyáltalán reálisak-e?

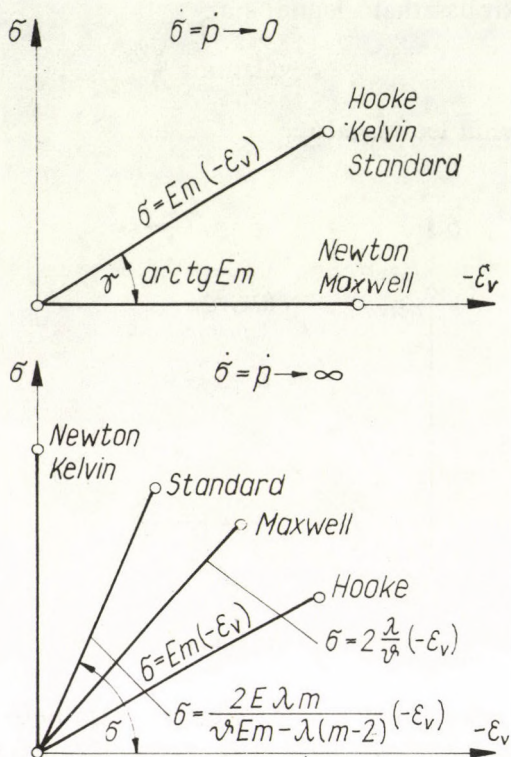
Abban az esetben, ha a kísérlet során a keresztirányú (a terhelésre merőleges síkban jelentkező) nyúlást is regisztráljuk, akkor további információkat kaphatunk az anyagegyenletre és anyagállandókra vonatkozóan.

Ugyanis (2) alatti egyenletet felhasználva

$$\epsilon_v = \frac{1}{2} \epsilon - \frac{m-2}{2Em} \sigma = \quad (4)$$

$$\frac{1}{E} \left[ \frac{\sigma}{m} - \frac{1}{2} \dot{p} \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{E}{\lambda} \cdot \frac{\sigma}{\dot{p}} \right\} \right) \right].$$

A két szélső terhelési esethez tartozó összefüggéseket az 53. ábra mutatja.



53. ábra.

Az  $\epsilon$  és  $\epsilon_v$  mérésből az egyenesek  $\tg \alpha = A$ ;  $\tg \beta = B$ ;  $\tg \gamma = C$ ;  $\tg \delta = D$  iránytangenseinek felhasználásával meghatározhatók, az

$$E = A$$

$$m = \frac{C}{A}$$

$$\frac{\lambda}{\vartheta} = B$$

állandók. A

$$D = \frac{2 E \lambda m}{\vartheta E m - \lambda(m-2)} = \frac{2 B C}{C - B \left( \frac{C}{A} - 2 \right)}$$



egyenlet ellenőrzésére, illetve kiegyenlítésére használható. A négy iránytangensből adódó négy egyenlet nem független egymástól, így a  $\lambda$  és  $\vartheta$  értéke külön-külön nem határozható meg belőlük, csupán a hányadosuk.

#### 4.62 Kúszási próba

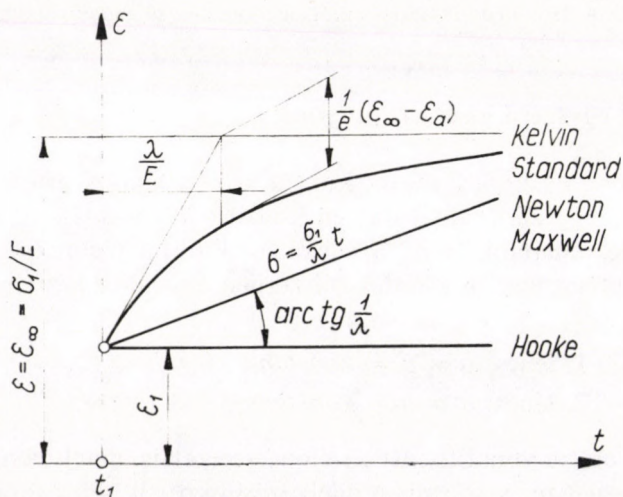
A próbatest terhelését a  $t$  időpontban megállítva, mikoris

$$\epsilon \Big|_{t=t_0} = \epsilon_0 \quad \text{és} \quad \sigma \Big|_{t=t_0} = \sigma_0, \quad (5)$$

s a további fajlagos hosszváltozást regisztrálva kapjuk a kúszási görbét, amely a *standard* modell esetében a következő összefüggéssel reprezentálható:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma_0}{E} - \left( \frac{\sigma_0}{E} - \epsilon_0 \right) \exp \left\{ - \frac{E}{\lambda} (t - t_0) \right\} = \\ &= \epsilon_\infty - (\epsilon_\infty - \epsilon_0) \exp \left\{ - \frac{E}{\lambda} (t - t_0) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Az 54. ábrán a különböző idealizált reológiai modellekhez tartozó kúszási görbéket tüntettük fel.

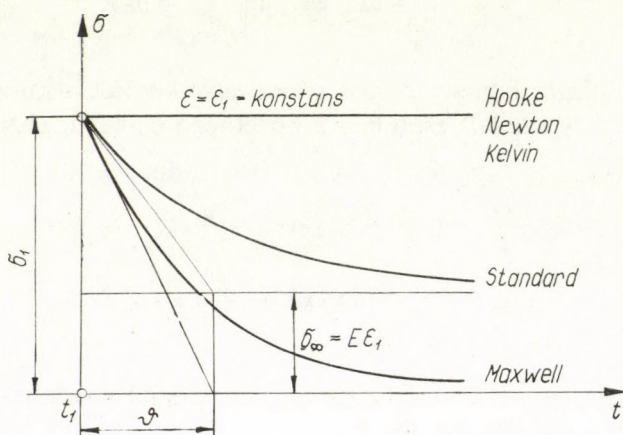


54. ábra. Homogén-lineáris reológiai modellek kúszásdiagramjai

A 4.61 pontban ismertetett vizsgálat eredményeit is felhasználva az összes reológiai állandó meghatározható.

#### 4.63 Relaxációs próba

Rögzített deformációhoz tartozó feszültség-változási-relaxációs-görbét az 55. ábra mutatja.



55. ábra. Homogén-lineáris reológiai modellek relaxációs diagramjai

#### 4.7 Egy egyszerű kísérleti program

Az elmondottakból látható, hogy a közetállandók értékének meghatározásához egy adott próbatesten legalább két vizsgálatot (terhelési esetet) kell végrehajtani. Mivel a relaxációs kísérlet technikailag a legnehezebben kivitelezhető, a kísérlet célszerűen az alábbi két lépésből állhat:

1. lépés:  $\dot{\sigma} = \dot{p} = konstans, \quad 0 \leq t \leq t_0,$
2. lépés:  $\sigma = \sigma_0 = konstans, \quad t_0 \leq t < \infty.$

Erre az esetre vonatkozott az előző fejezet is, amelyben feltételeztük, hogy  $\epsilon - \sigma - t$  regisztrátum rendelkezésünkre áll, s így módunkban van számos összetartozó értékhármass felhasználásával elektronikus szá-



mítógéppel kiegyenlítésen keresztül a közetállandókat meghatározni.

A reológiai közetállandók *közvetlen* meghatározása érdekében a következőképpen kell eljárni:

Az 1. lépésben állandó feszültségváltozási sebességgel terheljük a próbatestet, s a  $t_0$  időpontban, amikor a terhelést rögzítjük, egyúttal regisztráljuk az összetartozó

$$t_0, \sigma_0, \epsilon_0 \quad (7a)$$

értékeket (lásd 56. ábra). Majd állandó terhelés mellett engedjük a próbatestet kúszni, miközben egy tetszőleges időpontban regisztráljuk az összetartozó

$$t_\Delta, \sigma_0, \epsilon_\Delta \quad (7b)$$

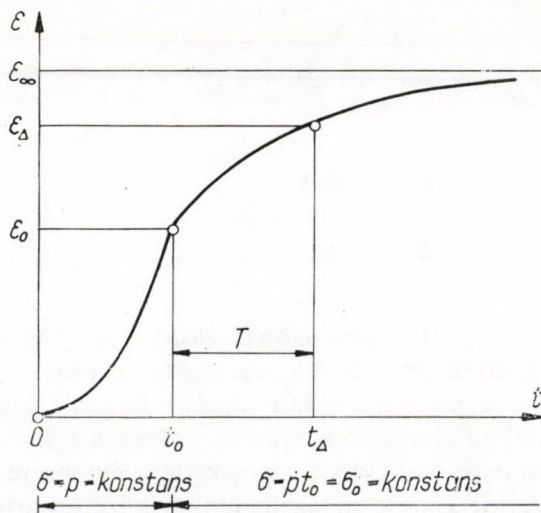
értékeket. A kísérlet végén, ha a próbatest már nem deformálódik, leolvashatjuk az

$$\epsilon_\infty \quad (7c)$$

értékeket. Amennyiben az  $m$  Poisson-féle számot is meg kívánjuk határozni, akkor a próbatest

$$\epsilon_{\nu 0} \quad (7d)$$

keresztirányú fajlagos nyúlását is mérni kell a  $t_0$  időpontban.



56. ábra.

A (7a) – (7d) mérési adatok alapján az anyagállandók az

$$\epsilon_0 = \frac{1}{E} \left[ \sigma_0 - \dot{p} \left( \frac{\lambda}{E} - \vartheta \right) \left( 1 - \exp \left\{ - \frac{E \sigma_0}{\lambda \dot{p}} \right\} \right) \right],$$

$$\epsilon_{\Delta} = \epsilon_{\infty} - (\epsilon_{\infty} - \epsilon_0) \exp \left\{ - \frac{E}{\lambda} T \right\},$$

$$\frac{\sigma_0}{E} = \epsilon_{\infty}$$

$$\sigma_0 = \frac{Em}{m-2} (\epsilon_0 + 2 \epsilon_{\nu 0})$$

egyenletek alapján határozhatók meg a következő formában

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_{\infty}}, \\ \lambda &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_{\infty}} \frac{T}{\ln a}, \\ \vartheta &= \frac{T}{\ln a} - \frac{\epsilon_{\infty} - \epsilon_0}{\dot{p} b} \frac{\sigma_0}{\epsilon_{\infty}}, \\ m &= \frac{2 \epsilon_{\infty}}{\epsilon_{\infty} - \epsilon_0 - 2 \epsilon_{\nu 0}}, \end{aligned} \tag{8}$$

ahol

$$\begin{aligned} a &= \frac{\epsilon_{\infty} - \epsilon_0}{\epsilon_{\infty} - \epsilon_{\Delta}}, \\ b &= 1 - \exp \left\{ - \frac{\sigma_0}{\dot{p}} \cdot \frac{\ln a}{T} \right\}, \\ T &= t_{\Delta} - t_0. \end{aligned}$$

Az itt javasolt kísérleti programnak előnye, hogy az anyagállandók meghatározása egyetlen próbatesten végrehajtható kísérletsorral érhető el, amikor mindig ugyanazoknak az anyagállandóknak függvényeit mérjük. A kapott értékek finomítása, *megbízhatóságuk* fokozása a kísérlet-sor további összetartozó értékhármassainak figyelembevételével történhet, amikor is a (8) szerint kapott anyagállandókat közelítő értékeknek kell



tekinteni és azokat  $(E + \Delta E)$ ,  $(\lambda + \Delta \lambda)$ ,  $(\vartheta + \Delta \vartheta)$  valamint  $(m + \Delta m)$  alakban lehet a kiegyenlítésben szerepeltetni.

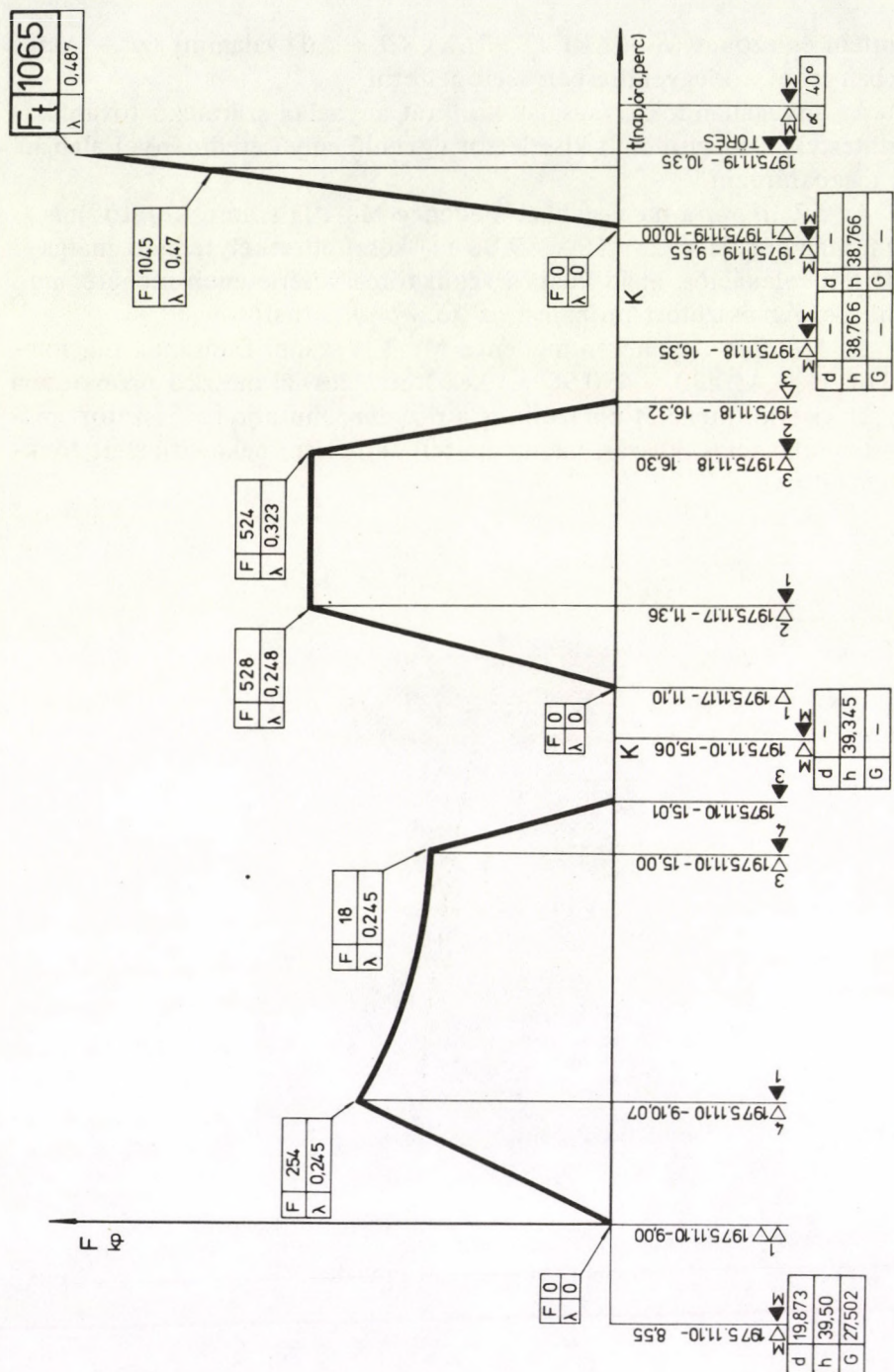
Az anyagállandók szórását a konkrét anyagból származó további mintatesteken megismételt kísérletsor egyenlő súlyú eredményei alapján kell meghatározni.

Az 57. ábrán a nagyegyházi medence Me 105 számú kutatófúrás magmintájából ( $H = 289,50 - 289,80$  m) készített sekélytengeri márga próbatest relaxációs, majd kúszási végül törési kísérletének menetét mutatjuk be. Az összetört próbatest az 58. ábrán látható.

Az 59. ábra ugyanezen medence Me 114 számú fúrásának magmintájából ( $H = 450,30 - 450,90$  m) készített édesvizi mészkő próbatesten végzett kísérlet menetét ábrázolja, s a 60. ábra mutatja az összetört próbatestet relaxációs, kúszás, majd ismételt terhelésre bekövetkezett tönkremenetel után.



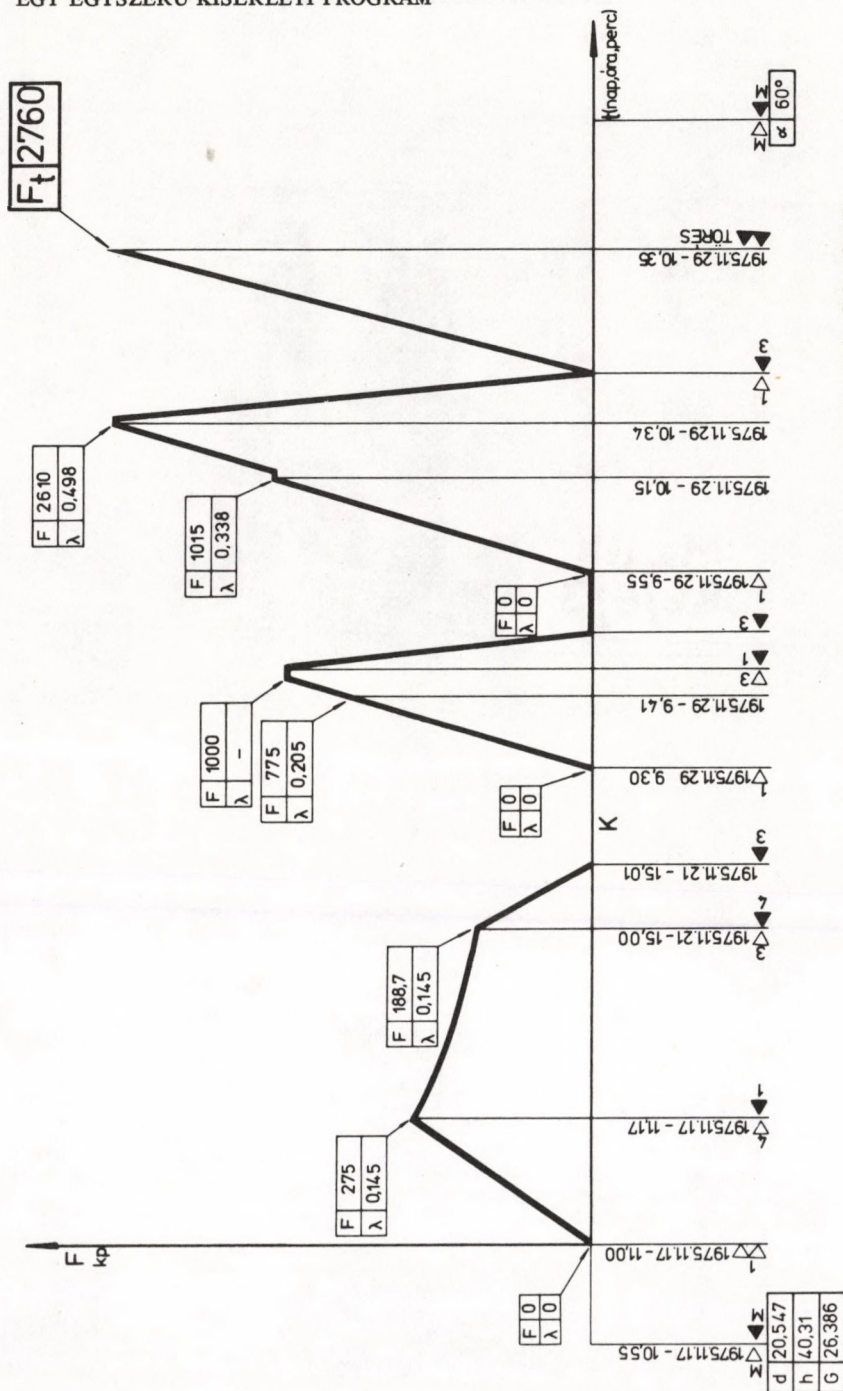
58. ábra. Az összetört próbatest



57. ábra. A kísérlet menete

Me 105-47/11/2





Me114-86/6/3

59. ábra. A relaxációs kísérlet, többszöri terheléssel a törésig



60. ábra.



## KÖZETÁLLANDÓK LABORATÓRIUMI MEGHATÁROZÁSA RELAXÁCIÓS VIZSGÁLATTAL

### 5.1 Bevezető megjegyzések

Az előző három fejezetben bemutattuk, hogy a kőzetek alapvető tulajdonságainak visszaadására alkalmas anyagtörvény a reológiai testek körében keresendő. Ehhez a felismeréshez meglehetősen hosszú út vezetett.

Hazai kőzetmintában végzett egyszerű nyomókísérleteknél a feszültség-alakváltozási görbe lineáristól való eltérése arra utalt, hogy a *Hooke*-törvény alkalmazása nem jelent megbízható közelítést. Mivel a próbatestek nem-lineáris viselkedése a képlékenységi határ alatt is jelentkezett, logikusnak látszott, hogy esetleg a nem lineáris mechanika összefüggéseire kellene támaszkodni. Ez azt jelentette volna, hogy a  $\sigma(\epsilon)$  görbét a kísérleti adatok alapján valamiféle magasabb rendű (hatvány, exponenciális, stb.) függvénnyel kell közelíteni. Ezt azonban két ok miatt nem lehetett elfogadni:

– Egyrészt a különböző kísérleti eredményekhez különböző típusú görbék simulnak a legjobban, s így a kőzetmechanikai analíziseken belül a legkülönbözőbb anyagegyenleteket kellene figyelembe venni, ami nagyon bonyolulttá és ebből következően nehezebben interpretálhatóvá tenné az eredményt. Természeti folyamatoknál azonban a túlzott bonyolultság általában arra utal, hogy nem sikerült a jelenségek lényegéhez oly közel férkőzni, hogy az igazi ok – amelynek fényében a fizikai jelenségek belső törvényei szinte triviálissá válnak – feltárhatók legyenek.

– Másrészt az anyagtörvény nem valamiféle fizikai megfontolás eredménye lenne, hanem több-kevesebb hibával terhelt mérési adathalmaz kiegyenlítő függvénye. A természetben viszont a makrovilágban sem fordulnak elő ilyen határozatlanságok. Kell lenni olyan általános és (a konkrét mechanikai rendszerre vonatkozóan) speciális fizikai tör-



vényeknek, amelyek a kőzetek anyagtörvényét meghatározza.

A bányászati tapasztalatok arra utalnak, hogy a kőzetköpenyt időfüggő „reológiai” kőzetnek kell tekinteni. A szóba jöhető reológiai tesztek köréből a kiválasztást egy modellanalízis segítette elő. Egyik oldalon megfogalmaztuk azoknak a törvényszerűségeknek a körét, amelyek a modellmegválasztást fizikai-matematikai oldalról determinálták, másik oldalon pedig azokat a kőzettulajdonságokat, amelyeket a bányászati tapasztalatok szerint a modellnek vissza kell tudnia tükröznie. A két követelmény összeegyeztetésére végzett modellanalízis — amelynek végeredményét a 2. fejezetben közöltük —, valamint a megengedhető közelítések mértékének a rögzítése alapján a *Poynting–Thomson*-féle standard modell alkalmazása mellett döntöttünk. Ez volt matematikai formájában legegyszerűbb — lineáris és magasabb rendű időfüggés nélküli — de a mellett a kőzettulajdonságok visszaadására legteljesebb modell.

Előző két fejezetben a standard modell feltételezésén alapuló néhány laboratóriumi kísérletről már beszámoltunk. A következőkben a relaxációs próba végrehajtását, kiértékelését és megvalósításához alkalmazott kísérleti berendezést ismertetjük.

A kísérlet lefolytatásánál két szakaszt különböztetünk meg:

1. *szakasz*: egyenletes feszültségváltozási sebességű terhelés egy meghatározott  $\epsilon$  deformáció eléréséig.
2. *szakasz*: a deformáció állandó  $\epsilon_a$  értéken tartása.

A kísérlet során mért terhelés, deformáció értékekből a kőzet anyagállandóinak meghatározása a cél.

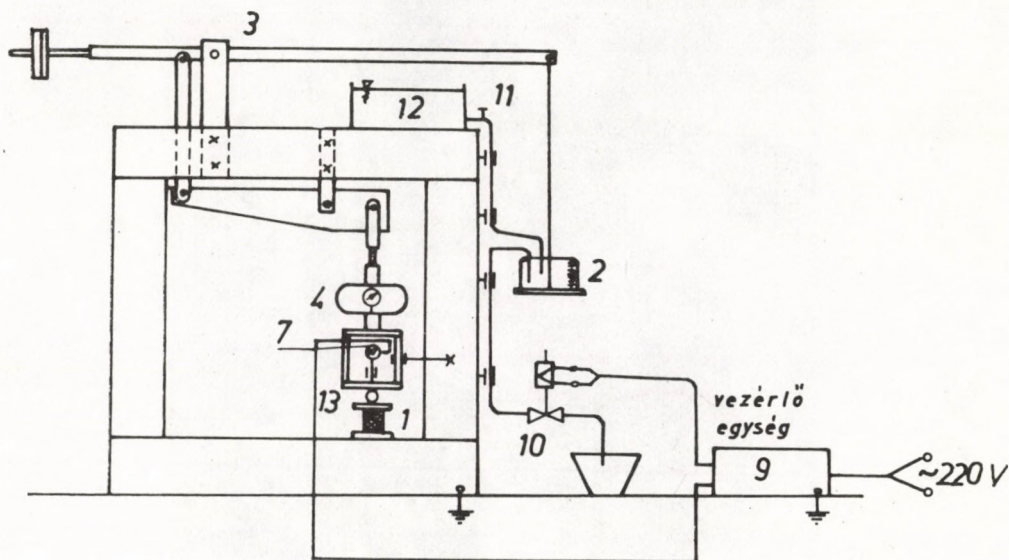
## 5.2 Kísérleti berendezés leírása

A vizsgálóberendezésnek a terhelés felvitelét, a próbatest állandó deformált értéken való tartását és az egész folyamat regisztrálását kell biztosítania.

A próbatest nyomóterhelését a 61. ábrában vázolt berendezéssel valósítottuk meg. A nyomóterhelés bizonyos törvényszerűség szerinti felvitele és értéken tartása a 3 kettős áttétellel és a 2 tartályba folyatott víz mennyiségének változtatásával történik. Az 1 próbatestre ható erő nagyságát a 4 erőmérőkengyel mérőórája mutatja, illetve a kengyelre ragasztott nyúlásmérő ellenállások segítségével elektromos úton vonalíró regisztrálja.



A próbatest centrikus terhelését az 5 golyó és a 6 tájolócsapok biztosítják.



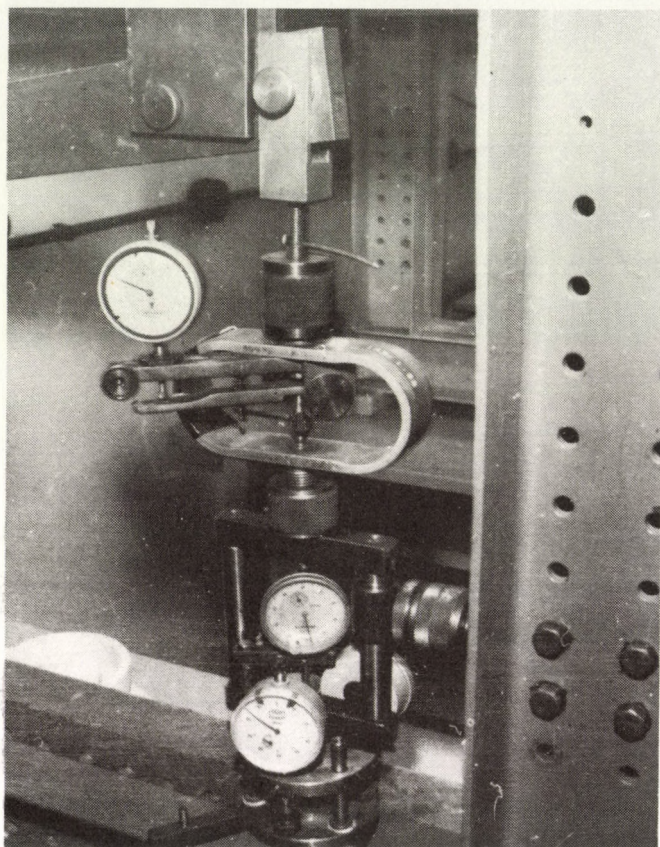
61. ábra.

A terhelőkeret fényképét a 62. ábra mutatja.

A 7 mérőórának kettős szerepe van (63. ábra). Egyrészt a próbatest mindenkor alakváltozását mutatja, másrészt a 8 előre beállítható érintkezőivel és a 9 vezérlőegységgel a 10 folyadékmennyiséget szabályozó mágnesszelepet működteti. A biztonságosabb érintkezés céljából a 7 mérőóra 8 érintkezői ezüstből készültek. A 7 mérőórát a 13 keret középvonalában helyeztük el, amelynek középvonala összeesik a próbatest középvonalával is. Így biztosítottuk, hogy a 7 mérőóra a próbatest valódi hosszváltozását érzékelje. A 14 nyomólapra, a 6 tájolócsapok osztóköreire illeszkedően is elhelyeztünk további három mérőórát, amelyek mutatott értékeinek átlaga megegyezik a 7 mérőóra által mutatott értékkel, így a 7 mérőóra kontrolljaként szolgálnak.

A relaxációvizsgálat során a terhelést szabályozó 10 mágnesszelepet egy 24 V-os relé kapcsolja a 220 V-os hálózati feszültségre. A 8 érintkezők nem közvetlenül a 24 V-os relé meghúzóáramkörét zárják, hanem eléjük egy tranzisztoros erősítőt építettünk és ez működteti a

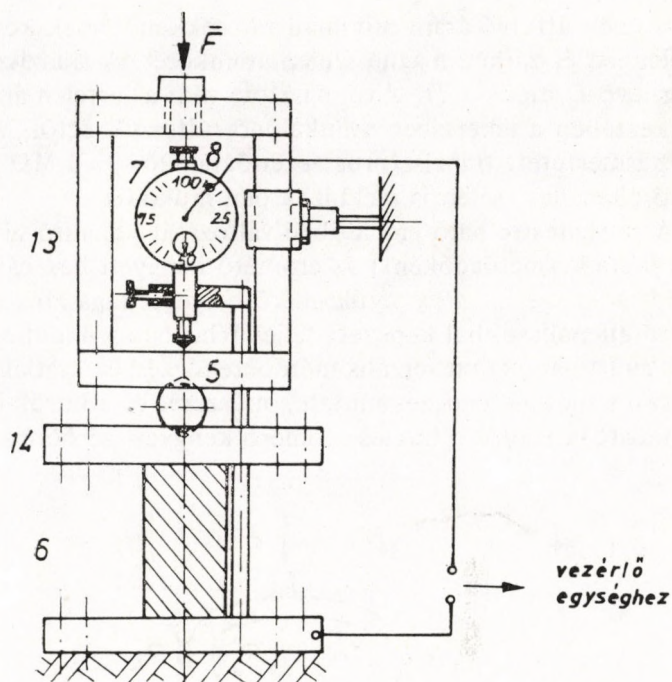




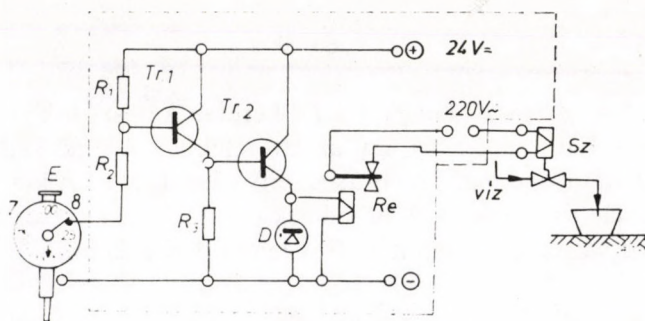
62. ábra. Relaxációmérő berendezés. Alul három deformáció—  
mérőóra, felül a dinamométer órája, középen a terhelést vezérlő óra

relét. A tranzisztoros erősítőt tartalmazó 9 vezérlőegység kapcsolását a 64. ábra mutatja. A tranzisztoros erősítő egyrészt csökkenti a 8 érintkezők szikrázását és beégését, másrészt az érintkezők nagyobb átmeneti ellenállása esetén is működőképesse teszi a relét, illetve a mágnesszelepet. A tranzisztoros kapcsolásban az  $R_1$ ,  $R_2$  és  $R_3$  ellenállások a  $Tr. 1$  és  $Tr. 2$  tranzisztorok munkaponti ellenállásával a 7 mérőóra 8 érintkezői vannak sorbakötve. Nyitott érintkezők esetén a relé meghúzott állapotban van és megszakítja a mágnesszelep áramkörét. Tehát ebben az állapotban a  $Tr. 2$  tranzisztoron a relét behúzó áram folyik, vagyis ekkor a tranzisztor belső ellenállása





63. ábra.

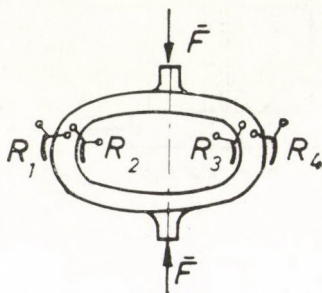


64. ábra.

kis értékű. Ha a 8 érintkezők záródnak, a *Tr. 1* tranzisztor árama megnő, belső ellenállása lecsökken és ez oly mértékben tolja el a *Tr. 2* tranzisztor munkapontját, hogy a belső ellenállása megnő és a rajta, vala-

mint a relén átfolyó áram minimálisra csökken, ennek következtében a relé elenged és zárja a mágnesszelep áramkörét. A tranzisztoros kapcsolásban lévő  $D$  dióda a  $Tr. 2$  tranzisztort védi a hirtelen áramcsökkenés következtében a tekercsben indukálódó túlfeszültségtől. Méréseink szerint az ismertetett tranzisztoros vezérlőáramkör  $3-4 \text{ M}\Omega$  nagyságú átmeneti ellenállás esetén is megbízhatóan működik.

A próbatestre ható erő időbeli változását vonalíróval rögzítettük. Érzékelőként (mérőadóként) az erőmérő kengyelt használtuk fel, amelyre a 65. ábra szerint négy nyúlásmérő bélyeget ragasztottunk. A nyúlásmérő ellenállásokból képezett teljes Wheatstone-hidat az UM-111 (NDK gyártmányú) univerzális mérőberendezéshez csatlakoztattuk. Az univerzális mérőberendezés mutatós műszerét és a hurok-kimenetre csatlakoztatott vonalírót a hiteles erőmérő kengyel mérőórájával hitelesítettük.



65. ábra.

tük. Mivel az erőmérő kengyel a 13 kereten keresztül közvetlenül a próbatestre ható erőt méri, így az áttételekben fellépő súrlódóerők mérési hibát nem okoznak. A nyúlásmérő ellenállásokkal kialakított teljes hídkapcsolás jó nullpont és hőmérsékleti stabilitást biztosít, így a terhelés időbeli változását megbízhatóan lehetett rögzíteni.

### 5.3 A mérés leírása

A próbatestre a terhelést időben lineárisan – állandó sebességgel – visszük fel. A linearitást időegység alatt állandó mennyiségű víznek a 2 tartályba való folytatásával (61. ábra) valósítottuk meg. A kifolyó víz állandó sebességét a 12 tartály vízszintmagasságának változatlan értéken



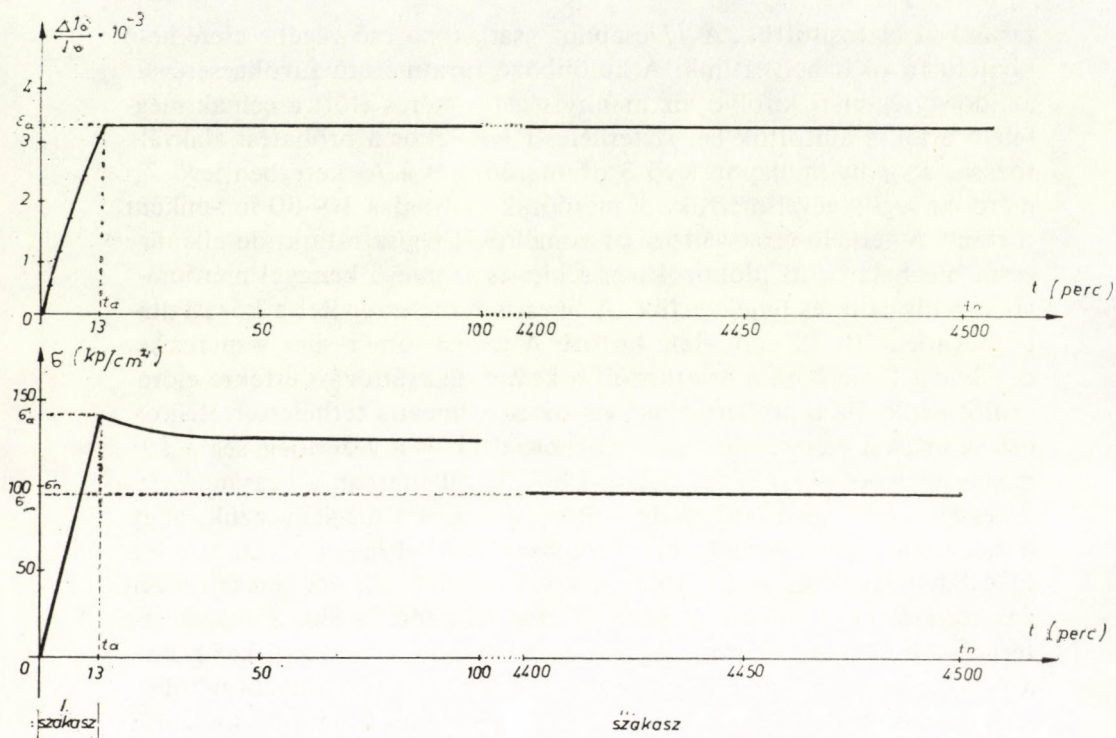
tartásával biztosítottuk. A 11 csaphoz csatlakozó cső végébe cserélhető kiviteli fűvókát helyeztünk. A különböző furatméretű fűvókacserével az időegység alatt kifolyó víz mennyiségét a mérés előtt a célnak megfelelő értékre állítottuk be. A terhelés felvitelekor a próbatest alakváltozását a 14 nyomólapon levő 3 db mérőóra és a 13 keretben levő 7 mérőóra segítségével mértük. A mérőórák leolvasása 10–30 mp-enként történt. A terhelő erők változását vonalíróval regisztráltuk, de ellenőrzésül meghatározott időközökben a hiteles erőmérő kengyel mérőóráját is leolvastuk és feljegyeztük. A lineáris terhelésfelvitel a közetfajtától függően 10–20 perc ideig tartott. A relaxációméréshez a mérés kezdetekor a 7 mérőóra 8 érintkezőit a kívánt alakváltozási értékre előre beállítottuk. Ha a próbatest alakváltozása a lineáris terhelésfelvitelkor ezt az értéket elérte, a 8 érintkezők záródtak és a vezérlőegység a 10 mágnesszelepet működésbe hozta. Ebben a pillanatban a beáramló víz sebességét igen lassú csepegésig csökkentettük. Itt megjegyezzük, hogy a mágnesszelepen kiáramló víz mennyisége sokkal nagyobb, mint a terhelésfelvitelkor beáramló vízé. Így a próbatest beállított alakváltozásának létrejöttékor, amikor a mágnesszelep működésbe lép, a próbatest terhelésnövekedése rögtön megszűnik és a terhelés csökkeni kezd. Ez a terheléscsökkenés addig tart, amíg a 7 mérőóra 8 érintkezői újból el nem válnak. Ha a próbatest hosszmérete a terhelés hatására csökken, a 8 érintkezők újból záródnak és a folyamat előlről kezdődik. A 2 tartályba csepegő víz a több napos mérés során bekövetkező párolgási veszteségeket pótolja. A relaxációs folyamat alatt is időközönként ellenőriztük a próbatest alakváltozását mutató 3 db nyomólapba és 1 db 13 keretbe szerelt mérőóra állását.

A relaxációmérés ideje alatt is ellenőrzésképpen az erőmérő kengyel mérőóráját többször leolvastuk és az időpont megjelölésével együtt feljegyeztük.

A mérésünk során rögzített diagramok közül egyet-egyet a 66. ábrában mutatunk be. A mérőórák leolvasásából, illetve a regisztrátumból nyert adatokat gépi úton dolgoztuk fel.

A relaxációvizsgáló berendezésünket érzékenység szempontjából is megvizsgáltuk és megmértük, hogy milyen hosszűrűssel képes a vizsgálendő próbatestet állandó erőfeszített hosszméreten tartani. Mivel ilyen kisméretű hosszváltozás mérése még az 1:1000 mm-es mérőórák is alkalmatlanok; közvetett mérési eljáráshoz kellett folyamodnunk. Ezért a közetpróbatest helyére azonos méretű, ismert rugalmassági modulusú acélpróbatestet helyeztünk. A 8 érintkezők beállítása után a 2 tartályba ál-





66. ábra.

landó sebességgel vizet folytattunk. A beállított nyúlásérték elérésekor az érintkezők záródtak és miután a mágnesszelep bizonyos mennyiségű vizet leengedett, az érintkezők újból szétnyíltak. A beáramló víz változatlanul tovább folyt, így a jelenség állandóan ismétlődött. Ez nemcsak az acélpróbatesten idézett elő hosszingerőzést, hanem az erőmérő kengyelen is erőváltozást. Az erőingadozás nagyságából (mivel nagysága jól mérhető) határoztuk meg az acélpróbatest hosszváltozását. A többször megismételt mérés során az acélpróbatest hosszváltozására mindig  $\pm 2 \times 10^{-5}$  mm értéknél kisebb adódott. Tehát a relaxációmérés során a vizsgálóberendezésünk a közetpróbatestet is ilyen hosszúsággal képes előfeszített értéken tartani. Ennek a hosszúságértéknek megfelelő erőingadozás természetesen a regisztrátumban is kis fűrészfog alakjában jelentkezik. A közetvizsgálati erőregisztrátumok fűrészfog-ingadozásait mérve, a próbatestjeinkben a vezérlésből származó feszültség-ingadozás  $\pm 1,5$  kp/cm<sup>2</sup> értéknél kisebbre adódott. Ha ezt az értéket a kő-



zetpróbatestek vizsgálati maximális feszültségéhez viszonyítjuk, akkor ez kisebb, mint  $\pm 1\%$  feszültségingadozásnak felel meg. A berendezés 0-pont stabilitása igen megbízható, mivel a próbatest hosszváltozásának értékelése teljesen mechanikus úton történik. Ezek alapján mondhatjuk, hogy a relaxációvizsgáló berendezés a mérés pontossága szempontjából a kívánalmaknak megfelel.

A relaxációmérésnél nagyon fontos a környezeti hőmérséklet állandó értéken való tartása, mert a próbadarab  $1\text{ }^\circ\text{C}$  hőmérsékletváltozáshoz tartozó hosszváltozása az alkalmazott vezérlés pontossági értékét meghaladja. Például  $l_0 = 30\text{ mm}$  próbatesthosszúság esetén  $\alpha t = 6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  hőtágulási együtthatóval számítva a hosszváltozás  $\Delta l_0/\Delta t = \alpha t l_0 = 18 \times 10^{-5}\text{ mm}/^\circ\text{C}$ , amely csupán  $1\text{ }^\circ\text{C}$  hőmérsékletváltozás esetén a vezérlés által biztosított  $\pm 2 \times 10^{-5}\text{ mm}$ -nél egy nagyságrenddel nagyobb.

#### 5.4 A kiértékelés

Az anyagi egyenletben szereplő anyagállandók értékei az egyes időpontokban felvett és összetartozó

$$t_i, \epsilon_i \quad i = 0, 1, \dots, a-1 \quad (\text{I. szakasz})$$

$$t_a, \epsilon_a, \sigma_a$$

$$t_i, \sigma_i \quad i = a+1, \dots, n \quad (\text{II. szakasz})$$

értékekből határozhatók meg.

A Poynting–Thomson testmodell megoldása az I. szakaszra

$$\epsilon = \frac{\dot{\sigma}}{E} \left[ t + (\vartheta - \lambda/E)(1 - \exp[-Et/\lambda]) \right], \quad (1)$$

a II. szakaszra

$$\sigma = E\epsilon_a + (\sigma_a - E\epsilon_a) \exp\left(-\frac{t-t_a}{\vartheta}\right) \quad (2)$$

egyenleteket adja.

#### 5.41 Direkt módszer

Az (1) és (2) egyenletekben szereplő anyagállandók meghatározása

a cél. Ezek közelítő értékei három mérés útján nyert adat segítségével határozhatók meg.

A (2) egyenletben  $t = \infty$  esetén a második tag az elsőhöz viszonyítva elhanyagolható. Ha a vizsgálat során az utolsó mérési pont  $t_n$  elegendően nagy, akkor

$$\sigma_n \approx E\epsilon_a,$$

illetve:

$$E_0 = \sigma_n / \epsilon_a. \quad (3)$$

Itt  $E_0$  az  $E$  rugalmassági modulus közelítő értéke.

Ugyancsak a (2) egyenletből a  $t_k$   $\sigma_k$  méréssel nyert értékpár és  $E = E_0$  behelyettesítésével

$$\sigma_k = E_0 \epsilon_a + (\sigma_a - E_0 \epsilon_a) \exp [-(t_k - t_a) / \vartheta_0] \quad (4)$$

összefüggést kapjuk, amelyből  $\vartheta_0$  a relaxációs tényező közelítő értéke kiszámítható:

$$\vartheta_0 = T / \ln f,$$

ahol

$$T = t_k - t_a, \quad f = (\sigma_a - \sigma_n) / (\sigma_k - \sigma_n). \quad (5)$$

Az (1) egyenletből

$$t_a = \sigma_a / \dot{\sigma}_*, \quad E = E_0, \quad \vartheta = \vartheta_0$$

összetartozó értékek felhasználásával

$$\epsilon_a = E_0^{-1} [\sigma_a + \dot{\sigma}_* (\vartheta_0 - \lambda_0 / E_0) (1 - \exp [-E_0 \sigma_a / \lambda_0 \dot{\sigma}_*])],$$

illetve (3) és (5) behelyettesítésével átrendezés után:

$$1 - \frac{\sigma_a - \sigma_n}{\dot{\sigma}_* \left( \frac{\epsilon_a}{\sigma_n} \lambda_0 - \frac{T}{\ln f} \right)} = \exp [ - \sigma_n \sigma_a / \epsilon_a \dot{\sigma}_* \lambda_0 ] \quad (6)$$

egyenlethez jutunk, amelyből  $\lambda_0$  a kúszási tényező közelítő értéke az



egyenlet két oldalának fokozatos közelítésével kiszámítható.

#### 5.42 Javított módszer

A három mérési adatból kiszámított anyagállandók értékén a többi mérési pont bevonásával tudunk javítani.

Feltételezzük, hogy a  $\vartheta$  relaxációs tényező a II. szakaszon nagyobb biztonsággal határozható meg, mint az I. szakaszon. A (4) és (3) egyenleteket felhasználva

$$\vartheta \ln [(\sigma_a - \sigma_n) / (\sigma_k - \sigma_n)] = t_k - t_a,$$

ahol  $(k = a + 1, \dots, n)$  egyenletrendszeret kapjuk.

Az egyenletek összeadása és rendezése után a relaxációs tényező javított értékére a

$$\vartheta = \frac{\sum_{k=a+1}^n (t_k - t_a)}{\sum_{k=a+1}^n \ln \frac{\sigma_a - \sigma_n}{\sigma_k - \sigma_n}}$$

kifejezéshez jutunk.

Az  $E_0$  és  $\lambda_0$  javított értékeit az (1) egyenlet felhasználásával, a legkisebb négyzetek módszerén alapuló görbeillesztéssel kapjuk. A számítási nehézségek miatt (1) függvényt lineárizáljuk: az anyagállandókon  $\delta E$  és  $\delta \lambda$  korrekciókat hajtunk végre. Az anyagállandónak ily módon egy sorozatát kapjuk. Behelyettesítve ezeket az értékeket az (1) egyenletbe és sorbafejtve azt,  $\delta E$  és  $\delta \lambda$  hatványai szerint, az első hatványoknál befejezve a sorfejtést, a  $t_i$  diszkrét időpontokhoz tartozó számított deformációk

$$\epsilon_{ik} = \epsilon(t_i, E_0, \lambda_0, \vartheta) + a_i \delta E + b_i \delta \lambda$$

$$(i = 1, \dots, a)$$

ahol

$$a_i = \left. \partial \epsilon / \partial E \right|_{t_i, E_0, \lambda_0, \vartheta} \quad b_i = \left. \partial \epsilon / \partial \lambda \right|_{t_i, E_0, \lambda_0, \vartheta}$$

számíthatók.

Képezzük az ily módon számított és a mért értékek eltéréseinek négyzetösszegét

$$\Delta = \sum_{i=1}^a (\epsilon_{ik} - \epsilon_i)^2.$$

A  $\delta E$  és  $\delta \lambda$  értékeket a  $\Delta$  minimalizálásával számíthatjuk ki, a

$$\partial \Delta / \partial (\delta E) = 0 \qquad \partial \Delta / \partial (\delta \lambda) = 0$$

feltétel alapján.

Az így kapott lineáris egyenletrendszer gyökei  $\delta E$  és  $\delta \lambda$  megadják az anyagállandók azon korrekcióit, amelyekkel a

$$E_1 = E_0 + \delta E, \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \delta \lambda, \quad \vartheta_1 = \vartheta_0 + \delta \vartheta$$

olyan értékei nyerhetők, amelyekkel az elméleti görbe legszorosabban illeszthető a mérési pontokhoz. Az illeszkedés szorosságát a

$$H^I = \sum_{i=1}^a (\epsilon_{ik} - \epsilon_i)^2 n_a^{-1}$$

és

$$H^{II} = \sum_{i=a+1}^n (\sigma_{ik} - \sigma_i)^2 n_r^{-1}$$

számokkal jellemezhetjük.

Itt

$n_a$  – a mérések száma az arányos terhelési szakaszon

$n_r$  – a mérések száma a relaxációs szakaszon

$\sigma_{ik}$  – a (2) képlet alapján számolt feszültségértékeket jelenti.

$H^I$  és  $H^{II}$  értékek alapján ítéldhetjük meg azt is, hogy az anyag mechanikai tulajdonságainak leírására a választott testmodell mennyire alkalmazható.

Az ismertetett számítási eljárás nagyon munkaigényes, ezért az anyagállandók numerikus kiszámításához elektronikus számítógépet alkalmaztunk.

A relaxáció elméletileg végtelen hosszú ideig tartó folyamat. Ezért fontos tudni, hogy mekkora véges időtartamú mérés során jutunk előírt pontosságú eredményhez. Jelöljük a  $t \rightarrow \infty$  tartozó  $\sigma$  feszültséget  $\sigma_\infty$ -nel. Ha azt kívánjuk, hogy az utolsó mérési adatunk  $\sigma_n$  a  $\sigma_\infty$ -tól 2%-



kal térjen el, akkor a (2) egyenletből a  $\sigma_n = \sigma_\infty = E \epsilon_a$  és a  $1,02 \sigma_\infty$  felhasználásával

$$t_n = \vartheta [\ln 50 (\sigma_a / \sigma_\infty - 1)] + t_a.$$

A vizsgálati időtartam hossza a  $\vartheta$ -án kívül a  $\sigma_a / \sigma_\infty$  viszonytól is függ. Kőzetanyagokra méréseink szerint ez a viszonyszám  $1,5 \sim 2$  körüli érték.  $\sigma_a / \sigma_\infty = 2$ -vel számolva  $t_n \sim 4\vartheta$ .

### 5.43 Sztochasztikus módszer

Az  $E$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta$  kőzetkarakterek laboratóriumi értékének meghatározásához az (1), (2) összefüggések felhasználásával az

$$\epsilon(t_i) = \dot{\sigma}_* / E - [t + (\vartheta - \lambda / E)(1 - \exp[-Et_i / \lambda])] \quad (7)$$

$$\sigma(t_i) = \sigma_n + (\sigma_a - \sigma_n) \exp[-(t - t_a) / \vartheta] \quad (8)$$

egyenletek állnak rendelkezésre. A (7), (8) alatti egyenletek különböző dimenziójúak, így a kiegyenlítéshez egyetlen függvénybe történő összevonásuk nem lehetséges. Ezért a megoldás meghatározása csak fokozatos közelítések sorozatán keresztül történhet. Ennek egy lehetséges módja a következő:

1. Az 5.41 pontban közölt direkt módszerrel meghatározunk egy  $E_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\vartheta_0$  kiinduló értékhármast.

2. Az I. szakaszra vonatkozó észlelési adatok alapján a

$$\Delta_1(E, \lambda, \vartheta) \equiv \sum_{i=1}^a (\epsilon_i - \epsilon(t_i))^2 \rightarrow \text{Min!} \quad (9)$$

feltételnek megfelelően meghatározunk egy  $E_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\vartheta_1$  értékhármast. Az  $\epsilon(t_i)$  függvény bonyolultsága miatt célszerű lineáris sorfejtést alkalmazni, s a (9)-ben szereplő  $\epsilon(t_i)$  függvény helyett az

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_i &= \epsilon(t_i, E_0, \lambda_0, \vartheta_0) + a_i \delta E + b_i \delta \lambda + c_i \delta \vartheta \\ (i &= 1, 2, \dots, a) \end{aligned}$$

3. A II. szakaszra vonatkozó észlelési adatok alapján

$$\Delta_{II}(E, \lambda, \vartheta) \equiv \sum_{i=a}^n (\sigma_i - \sigma(t_i))^2 \rightarrow \text{Min!} \quad (10)$$

feltételből – illetve annak közelítéséből – határozzuk meg az  $E_2$ ,  $\lambda_2$ ,  $\vartheta_2$  értékeket. Itt is célszerű a

$$\begin{aligned} \sigma(t_i) &= E\epsilon_a + (\sigma_a - E\epsilon_a) \exp[-(t - t_a)/\vartheta] = \\ &= \dot{\sigma}_* [t_i + (\vartheta - \lambda/E)(1 - \exp[-Et_i/\lambda])] + \\ &+ (\sigma_a - \dot{\sigma}_* [t_i + (\vartheta - \lambda/E)(1 - \exp[-Et_i/\lambda])]) \exp[-(t - t_a)/\vartheta] \end{aligned}$$

függvény  $E_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\vartheta_1$  helyen vett lineáris sorfejtésével számolni.

A 2. és 3. lépést mindaddig ismételjük, ameddig az  $E$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta$  értékek változása egy megadott határ alá nem csökken.

Ennek a módszernek az előnye az 5.42 alatt közölttel szemben abban jelentkezik, hogy a kőzetkarakterek értékének meghatározásához mindkét szakaszt – az arányos terhelést és a relaxációt egyaránt – felhasználtuk.

### 5.5 Megjegyzések

Ha a 2–5. fejezetben közölt eredményeket egymás mellé tesszük, kitűnik, hogy az egytengelyű nyomókísérletekkel megvalósítható összes próbák elvégzésére meg van a lehetőség. A legkülönbözőbb variációjú kísérletek végrehajtásához rendelkezésre állnak a szükséges berendezések, meghatározottak a kiértékelési elvek és képletek, elkészültek a szükséges számítógépi programok. Mindez lehetővé teszi, hogy egy-egy kőzetmechanikai vagy biztosítástechnikai szempontból érdekes terület problémáit kőzetmechanikai oldalról behatóbb vizsgálatnak vessük alá, vagy magát a területet, a kísérő kőzeteket reológiai karakterizálhassuk.

### 5.6 Néhány laboratóriumi kísérlet

A nagygyházi Me 105 számú kutatófúrásból ( $H = 289,50\text{--}289,80$  m) vett sekélytengeri agyagmárga próbatest relaxációs görbáját a 67. áb-



ra mutatja. A relaxációmérés után a próbatest egyenletes sebességű terhelésre 1065 kp-os értéknél ment tönkre (68. ábra).

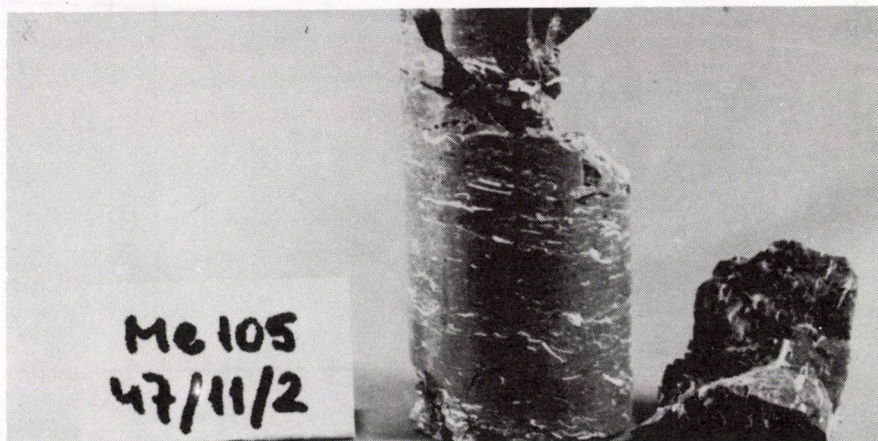
A 69. ábra az N60–6/5/11 jelű próbatest – globuláris agyagmár-ga ( $H = 372,20\text{--}382,80\text{ m}$ ) – terhelési diagramját, a 70. ábra pedig relaxációs görbét mutatja. A 71. ábrán a minta anyaga látható 1,8-szeres nagyításban. A próbatest a törésig történő terhelés után morzsák-ká hullott szét (72. ábra).

A 73. ábra az Me 114 számú kutatófúrás magmintájából készített ( $H = 450,30\text{--}450,90\text{ m}$ , édesvizi mészkő) próbatesten felvett relaxáci-ós görbét mutatja be. A 74. ábrán a próbatest törés utáni képe látható.

Relaxációs kísérlettel meghatározott reológiai állandókat közöl a 3. táblázat.

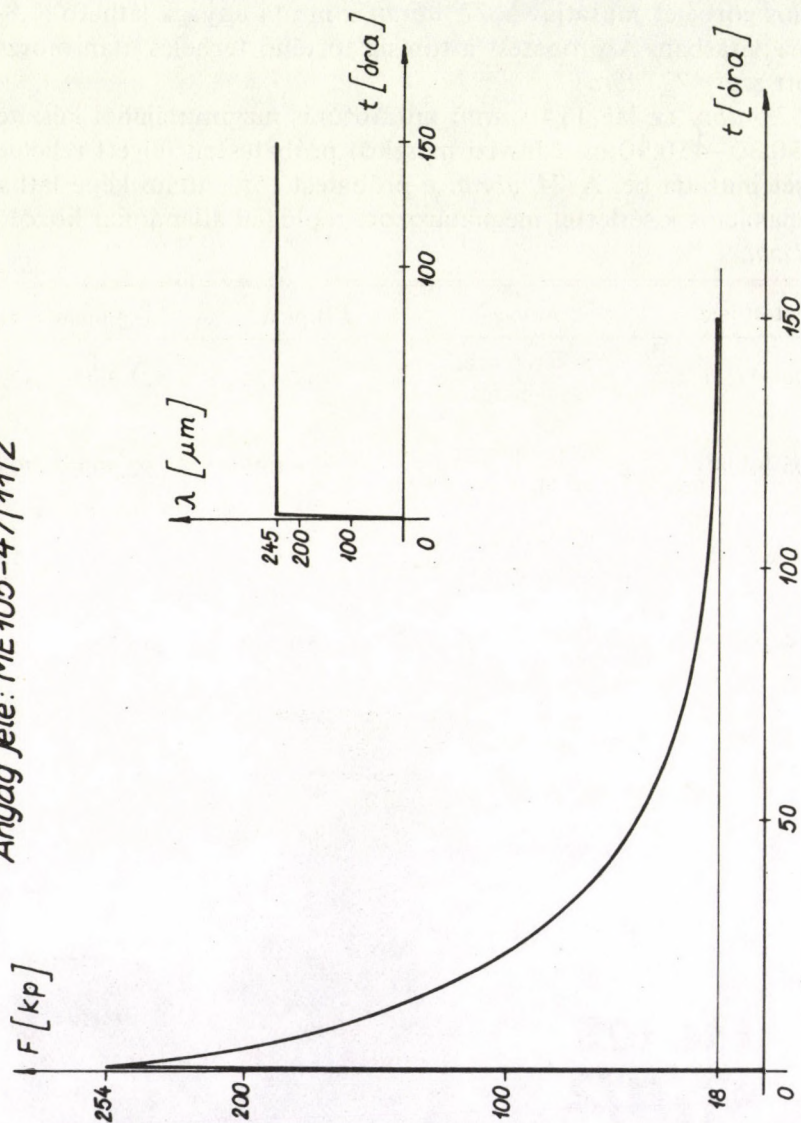
3. táblázat

A próbatest jele		Anyaga	$E[\text{kp}/\text{cm}^2]$	$\lambda[\text{kp},\text{ó}/\text{cm}^2]$	$\tau[\text{ó}]$
Me	105–47/11/2	Sekélytengeri agyagmár-ga	7 472	421 330	32,194
Me	105–48/8/15	Sekélytengeri agyag	16 095	92 999	29,964
N	60–6/5/11	Globuláris agyagmár-ga	6 495	8 205	5,611
Me	114–86/6/3	Édesvizi mészkő	150 242	545 728	23,618



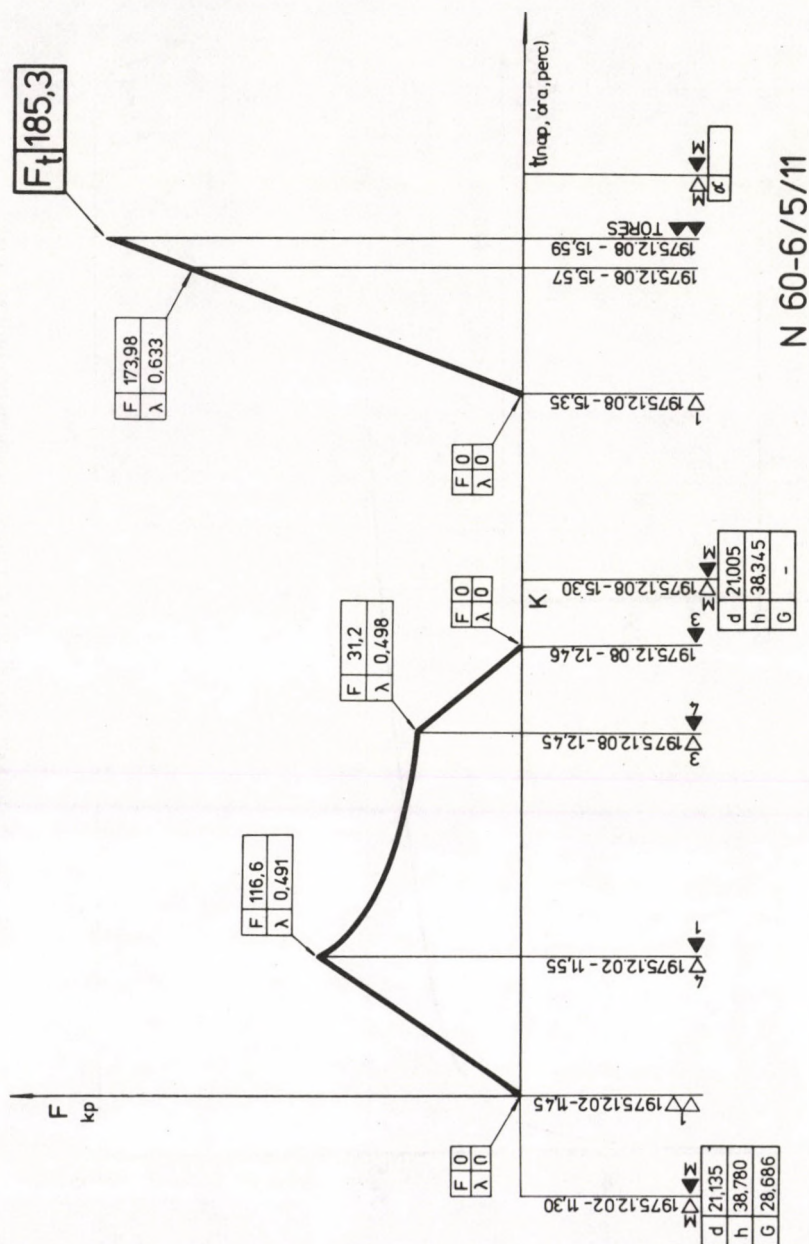
68. ábra. Az összetört próbatest

Anyag jele: ME105-47/11/2

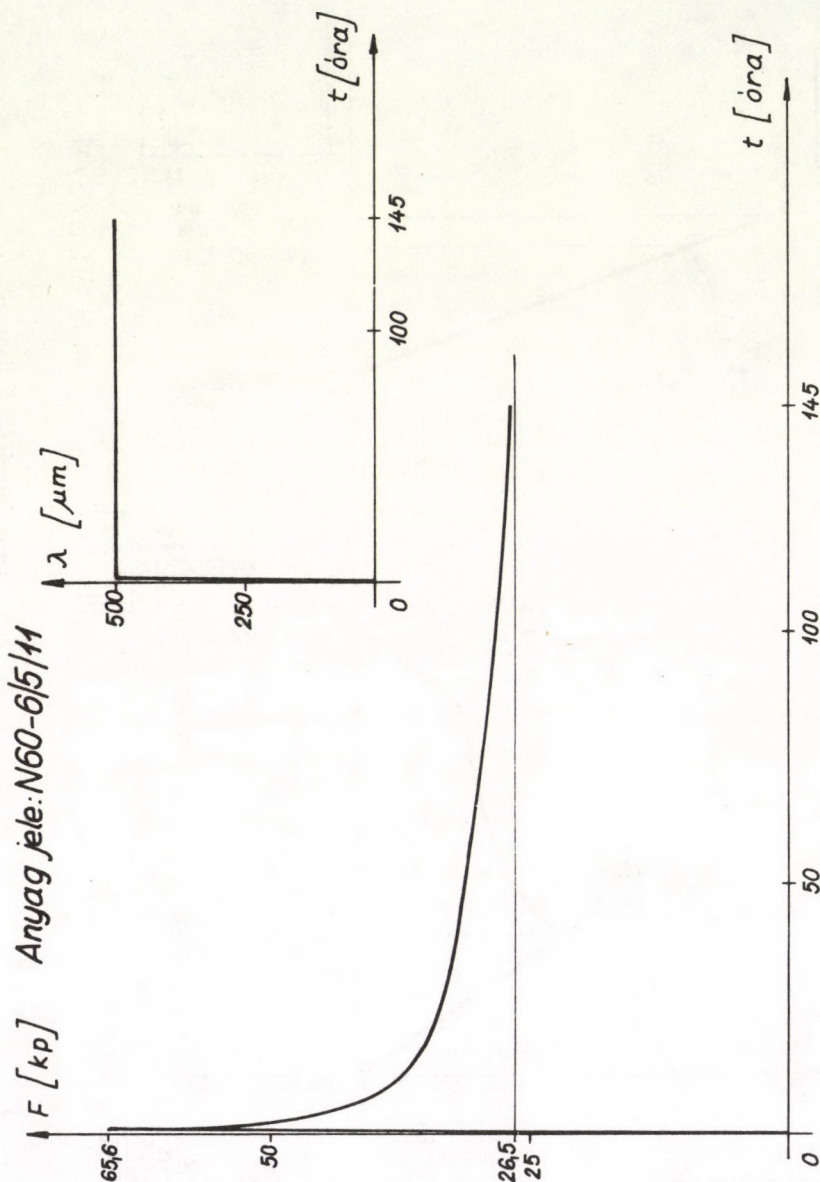


67. ábra. Nyúlás és relaxálódás az idő függvényében





69. ábra. A relaxációs kísérlet terhelés-idő diagramja

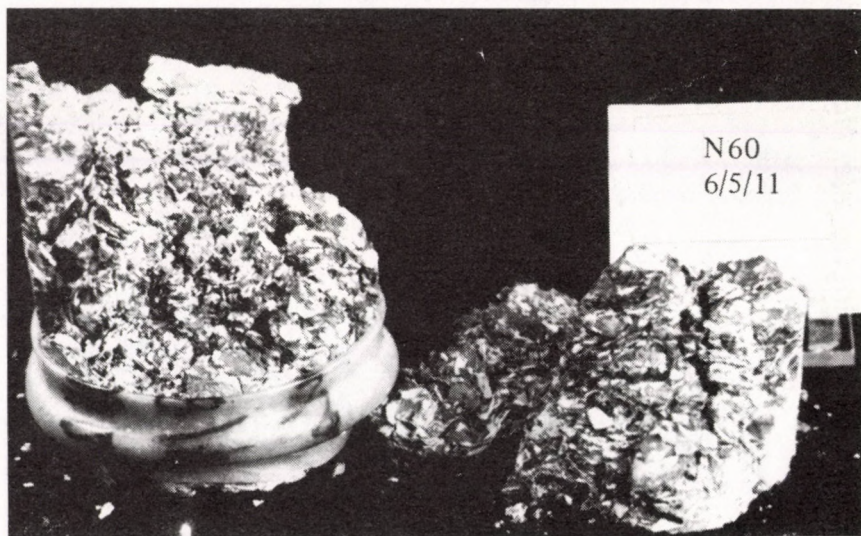


70. ábra. Nyúlás és relaxálódás globuláris agyagmárga próbatestnél

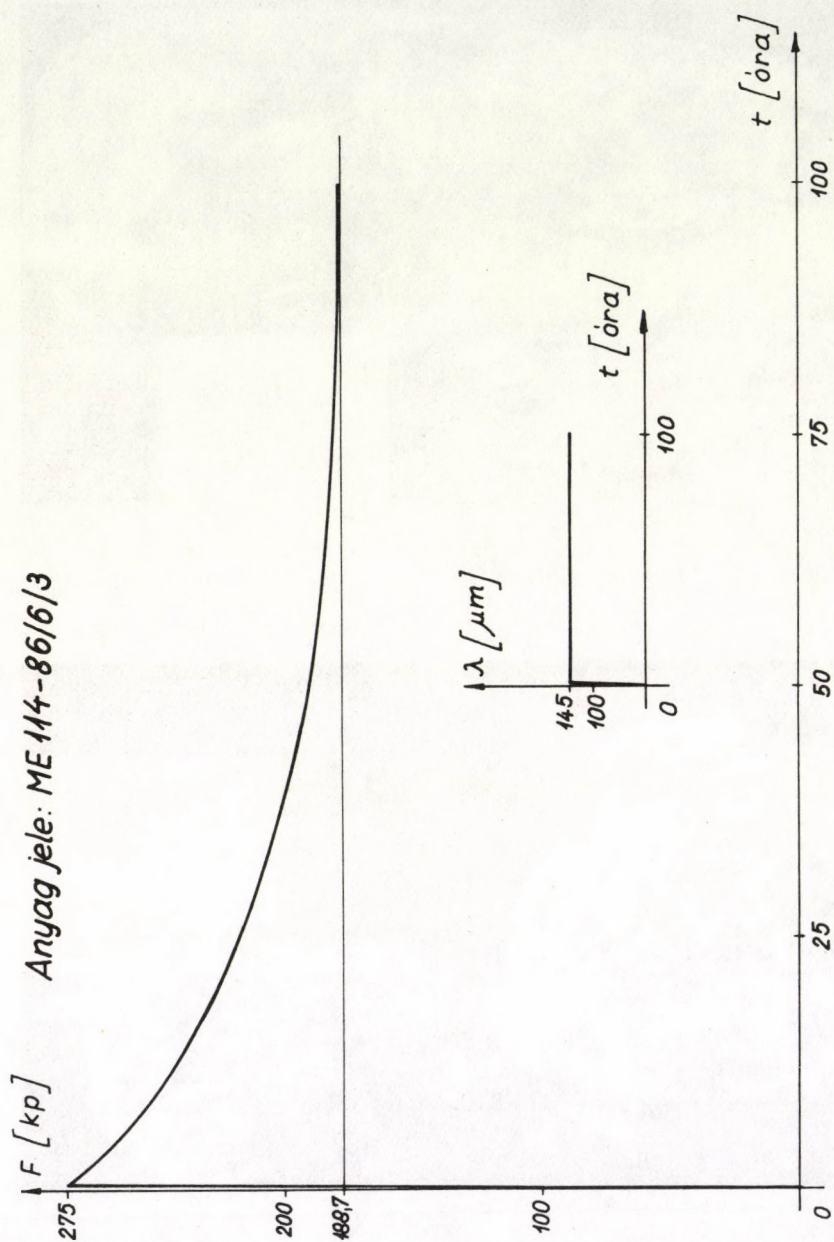




71. ábra

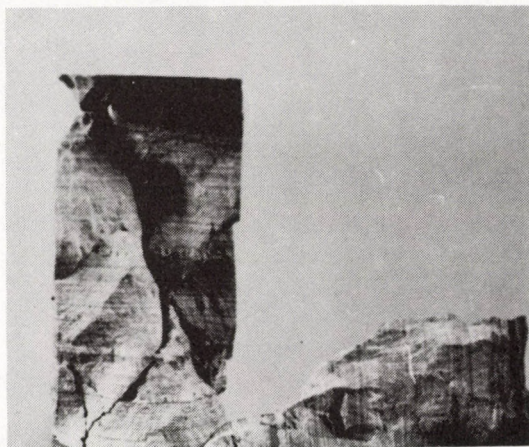


72. ábra



73. ábra. Édesvízi mészkő próbatest relaxációs görbéje





74. ábra. Édesvizi mészkő próbatest törés után





## LABORATÓRIUMI TRIAXIÁLIS NYOMÓVIZSGÁLATOK

## 6.1 Előzetes megjegyzések

A földkéreg különböző összetételű, halmazállapotú, rendezettségű anyagokból áll és különféle ugrásszerű összetételváltozások, rétegezethez, repedések, vetők jellemzik. Általában egyensúlyinak tekinthető helyzetben van. Ez az egyensúlyi helyzet megbomlik azonban akkor, ha például a kéregben üregeket, térségeket nyitunk, szilárd, folyékony vagy gáznemű anyagokat vonunk el. A nem egyensúlyi helyzetben anyagmozgások indulnak meg, amíg egy újabb egyensúlyi helyzet be nem áll. A mozgások következtében a kéregben lekötött energia, pl. a rugalmas deformációban tárolt energia, egy része felszabadulhat és további mozgásokat indíthat meg. A kéregmozgások következtében előálló tömegrendeződések veszélyeztetik a létesítmények állékonyságát. Ennek megítéléséhez bizonyos jellemzőknek az ismerete szükséges.

A kéreg mechanikai jellemzőit többnyire közvetett mérésekkel határozzuk meg. Az egyik ilyen mérés a kéregből kiemelt minta triaxiális vizsgálata. A következőkben a kőzetmintából kialakított próbatestek triaxiális vizsgálatával foglalkozunk, nem érintve azt a problémát, hogy a próbatestek mérésével nyert adatokból hogyan következtetünk egy kiterjedt kőzettömeg viselkedésére.

Köztudott, hogy a laboratóriumi kísérletek által kapott mérések megbízhatóság szempontjából hozzá sem mérhetők az in-situ eredményekhez. Mivel időfüggő közeg vizsgálatáról van szó a reológiai mérések keresztülvitelére, azok időigényes volta miatt, főleg fejtési munkahelyek közelében – a kvázi-prímér állapot mérés közbeni változása miatt – nincs mindig lehetőség, így a laboratóriumi mérések szolgáltatják csak sok esetben a biztosítószervezetek méretezéséhez, a kedvező biztosítás-technológia kialakításához nélkülözhetetlen adatokat.

Azt hisszük – és talán a kutatók nagyrésze egyetért ezzel – hogy az egytengelyű kísérletek adatainál megbízhatóbb kőzetjellemzőket



szolgáltatnak a háromtengelyű nyomáskísérletek adatai. Nem azért, mert ebben az esetben a laboratóriumi vizsgálatok maguk is és a kiértékelések is jóval bonyolultabbak, hanem azért, mert ez a kísérlet elvében jobban megközelíti a föld alatt uralkodó háromtengelyű in-situ feszültség-állapotot.

A kőzetminták laboratóriumi vizsgálatának célja különböző lehet:

- a mechanikai változók – a feszültségek és a létrehozott deformációk – közötti kapcsolatnak, a kőzet fizikai egyenletének meghatározása,
- az anyagállandók konkrét értékeinek megállapítása,
- kőzetanyagok képlékenységi határának meghatározása,
- a kőzetek tönkremeneteli határának, a tönkremeneteli feltételek meghatározása.

## 6.2 A törés

A próbatest valamelyik  $p$  pontjában ún. helyi (lokális) törésről beszélünk akkor ha e pont környezetében előálló deformáció következtében az anyagrészeknek egymással való kölcsönhatása alapvetően megváltozik, pl. a folytonosság megszűnik, repedés következik be. A test teljes (totális) törése esetén a helyi törések a testnek olyan nagy részére terjednek ki, hogy az szilárdsági szempontból tönkremegy, további teherviselésre alkalmatlanná válik.

Az anyagi rendszerekben bekövetkező tönkremenetel, mint azt *Asszonyi Csaba* [5] alatti disszertációjából tudjuk, az anyagi rendszerek deformációs munkavégző képességével kapcsolatos, az energiaszóródás jelenségével van összefüggésben. Jó közelítést jelent azonban bizonyos esetekben, ha a törési állapotot a feszültségállapottal kapcsoljuk össze. Így jelen fejezetben elfogadhatónak tartva a *Coulomb*-féle feltételt, vizsgálatainkat erre az egyszerű esetre szűkítjük. Ebben az esetben a test kiszemelt  $p$  pontja környezetében bekövetkező lokális törést a pontban uralkodó feszültségi állapottal hozzuk kapcsolatba, és ezt az utóbbit a test egyik, közelítő szilárdsági jellemzőjének tekinthetjük. A lokális törés többféle, egymástól különböző feszültségi állapot esetén is bekövetkezhet. A törést okozó összes lehetséges feszültségi állapot együttese alapvető szilárdsági jellemző ebben a felfogásban.

Ha ismerjük a törést okozó feszültségi állapotegyüttest, akkor valamely test tönkremenetelére következtetni tudunk.



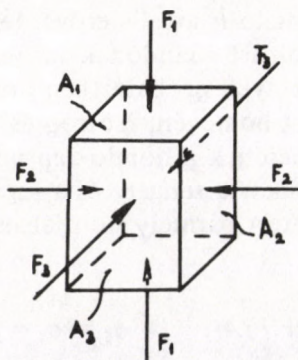
A vizsgálandó test egyes pontjaiban uralkodó feszültségi állapotegységet meghatározzuk. Ha van a test valamely pontjában olyan feszültségi állapot, amely közel esik a mért együttes valamelyik tagjához, akkor abban a pontban lokális törés várható.

Egytengelyű vizsgálatból a törést okozó feszültségi állapotegységet csak egy tagját kaphatjuk meg. Az egész együttes meghatározásához triaxiális vizsgálatok sorozatára van szükség. Ez a vizsgálat különböző feszültségi állapotok előállítását teszi lehetővé.

### 6.3 A triaxiális vizsgálat

A triaxiális vizsgálatot alkalmas próbatesteken végezzük el. A próbatest vizsgált  $p$  pontjában uralkodó feszültségi állapotot közvetlen méréssel általában nem tudjuk meghatározni, kísérleti eszközeinek véges mérete miatt. Mérésre azonban mód nyílik, ha a próbatest elég nagy részén homogén feszültségi állapot van. Homogén, háromtengelyű feszültségi állapot jön létre például olyan derékszögű hasáb alakú homogén, izotróp és folytonos testben, amelyet a lapokon egyenletesen megoszló normális erőrendszer terhel. Ekkor a feszültségi főirányok a lapok normálisának az irányába esnek. A test bármely pontjában a főfeszültségeket a lapokon megoszló erőrendszer  $F_i$  eredőjéből és a lapok  $A_i$  felületéből lehet meghatározni (75. ábra):

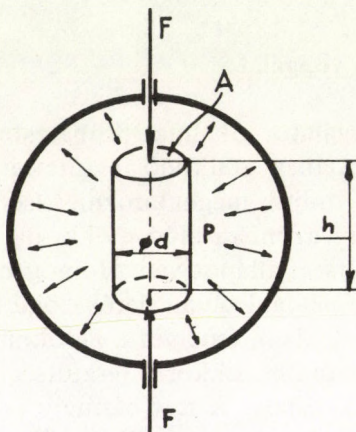
$$\sigma_1 = F_1/A_1, \quad \sigma_2 = F_2/A_2, \quad \sigma_3 = F_3/A_3,$$



75. ábra



Ilyen próbatestet a fenti módon törésig terhelve, egy törést okozó ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) feszültségállapotot megismerhetünk. A kísérletet különféle feltételekkel elvégezve, egy sorozat törésre jellemző feszültségi állapotot határozhatunk meg. Elég sűrűn elvégzett mérések esetén a közben-ső értékeket jó közelítéssel lehet interpolálni. A mérésnek az ilyen módon való elvégzése azonban nagyon nehézkes, a szerkezet bonyolult, a terhelés körülményes, az eredmény pontossága nem kielégítő.



76. ábra.

A gyakorlatban a vizsgálatokat az esetek túlnyomó részében egyenes-körhenger alakú tömör, vagy csőszerű próbatesteken valósítjuk meg. A próbatesteket  $p$  nyomású folyadéktérbe helyezzük, majd a homloklapjain egyenletesen megoszló  $F$  axiális erővel terheljük (76. ábra). A kísérlet folyamán a  $p$  nyomást állandónak tartjuk és az  $F$  erőt a próbatest töréséig növeljük. Az ilyen próbatestben homogén feszültségi állapot ébred akkor, ha a test homogén, izotróp és folytonos, ezenkívül az  $F$  egyenletesen megoszló erőnek a homloklap minden pontjában csak axiális összetevője van. Ekkor a tengely és a sugarak feszültségi főirányok. A feszültségeket a test bármely pontjában egyszerűen lehet kiszámítani.

$$\sigma_1 = p + F/A, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = p.$$

A feszültségi állapotot tehát a  $p$  nyomásnak és az  $F$  axiális erőnek



a szabályozásával lehet beállítani. Különböző  $p$  nyomásoknál megmérve a törést okozó  $F_t$  erőt, a törést okozó feszültségi állapotok együttesének egy részét meghatározhatjuk.

A feszültségi állapotot a  $(\sigma, \tau)$  koordinátarendszerben a  $\sigma$  tengelyen fekvő középpontú,  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  átmérőjű kör ábrázolja. Felrajzolva a törést okozó feszültségállapotok  $(\sigma_t - \sigma_p)$  átmérőjű *Mohr*-köreit, e körök burkológörbéje segítségével az interpolációt könnyű elvégezni. A törést okozó feszültségi állapotok *Mohr*-köreit burkoló  $\tau(\sigma)$  görbét törési határgörbének nevezzük, a törési feszültségi állapotok együttesének jellemzésére használjuk fel. Ha egy vizsgált feszültségi állapotot ábrázoló *Mohr*-kör a törési határgörbét megközelíti, érinti vagy metszi, akkor a testnek ebben a pontjában törés várható. A törési határgörbe általában görbe, bizonyos anyagoknál azonban egyenes. Még az előbbi esetben is jó közelítéssel egyenesnek vehető. A határgörbét így

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \Phi + c$$

függvényt írja le. Az ebben szereplő  $\Phi$  szöveget a belső súrlódás szögének a  $c$  állandót pedig kohézióknak nevezik.

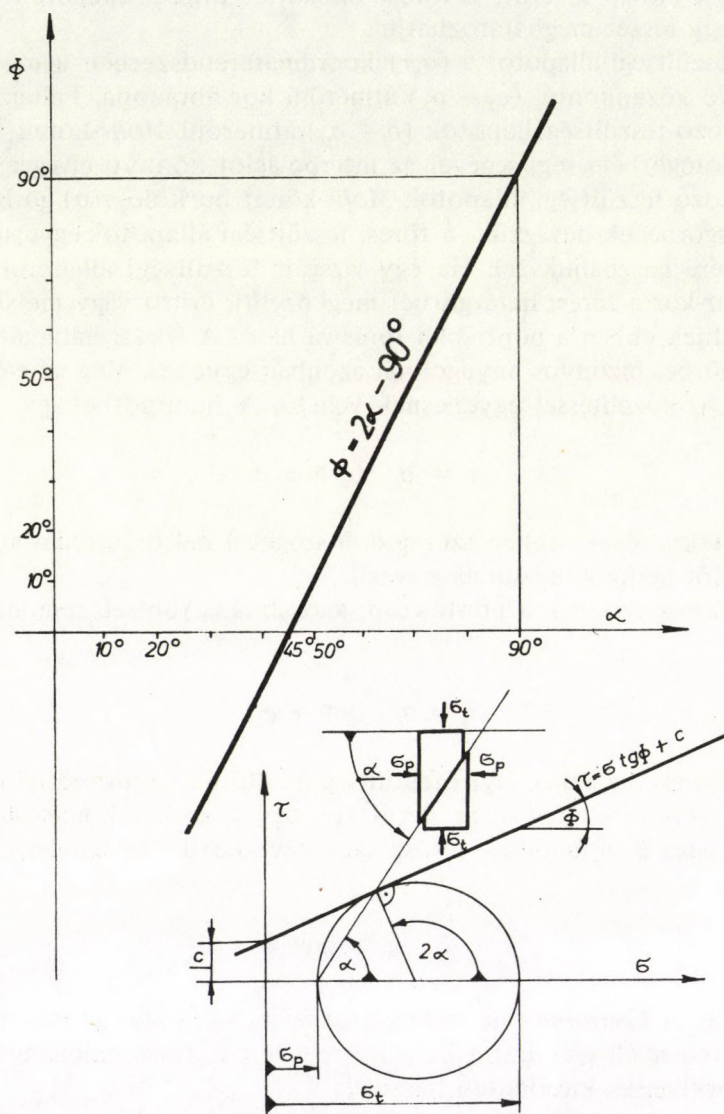
Töréskor azokban a pontokban, ahol lokális törések indulnak meg,

$$\tau_t = \sigma_t \cdot \operatorname{tg} \Phi + c$$

egyenlőségnek megfelelő nyirófeszültség uralkodik *Coulomb* feltevése szerint. Ebből a feltételből az derül ki, hogy a törés a homloklappal  $\alpha$  szöveget bezáró síkfelületen (csúszólap) következik be, amelyre nézve fennáll a

$$2\alpha = \Phi + 90^\circ$$

egyenlőség. A *Coulomb*-féle feltevés azt fejezi ki, hogy a törés nyírás következtében áll elő. Ezt a közelítő feltevést a konvencionális talaj és a közetmechanika kiterjedten használja.



77. ábra. A Coulomb-féle törési határfeltétel és a  $\Phi$ – $\alpha$  szögek közötti összefüggés



#### 6.4 A triaxiális készülék

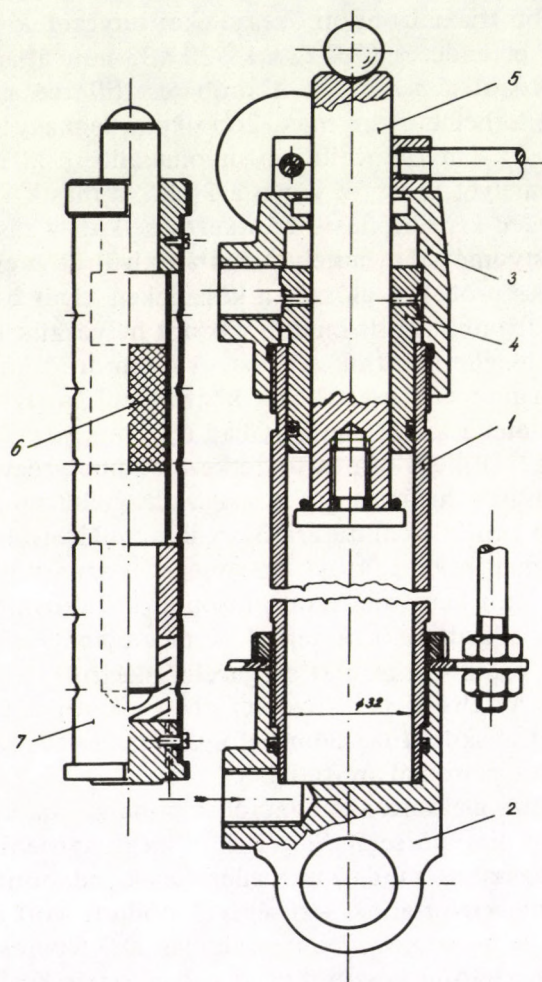
A háromtengelyű törési és alakváltozási kísérlet végrehajtásához a Gödöllői Agrártudományi Egyetem Mezőgazdasági Gépészmérnöki Karának Mechanikai Tanszékén a szénbányászat megbízása alapján az elmúlt években több triaxiális nyomókészüléket tervezetek és építettek.

A B-1 jelű berendezés (78. ábra)  $\phi 20 \times 33$  mm átlagos méretű próbatestnek a vizsgálatára készült. A próbatest (illetve a próbatestet hordozó patron) terhelhetősége max. 2000 kp, a legnagyobb cellanyomás 150 kp/cm<sup>2</sup>. Az 1 nyomócella egy nyomásálló,  $\phi 33$  mm belső átmérőjű henger, amelyet az egyik végén a 2 üllő, a másik végén a 3 fedél zár le. A fedélen kis súrlódású, érintkezés nélküli 4 réstömörítéssel vezetjük át az 5 nyomórúdat, amelyet azután kívülről  $p$  erővel terhelünk. A 6 hengeres próbatest először a készüléken kívül összeszerelhető tartóba, a 7 patronba kerül, majd a patronra helyezzük el a nyomócellában, végül a fedéllel lezárjuk a cellát. A nyomórúd külső végéhez a 8 kengyeles dinamométer csatlakozik közvetlenül. A nyomórúdnak a fedél és a dinamométer között levő szabad részére szorítóbilinccsel van rögzítve az elmozdulásmérő óra tartószerkezete, amely egyúttal a nyomórúd elmozdulásának határolására is szolgál. A cellát megtöltő nyomóanyag olaj. A nyomás előállítására hidroakkumulátorral kiegészített, nyomástartó automatikával ellátott tápegységet használtunk. Az axiális terhelőerőt a 9 kettős karos mechanizmuson át a 8 dinamométerre ható 10 súlyterhelés állította elő. A terhelő tömeg szabályozható mennyiségű víz volt. Az egész szerkezetet szögacélból készült 11 keretbe szereltük (79. ábra). Az elrendezés következtében a keret deformációja a mérés pontosságát gyakorlatilag nem befolyásolta. A 80. ábra a B-1 készülék szétszerelt patronját mutatja.

A dinamométer alakváltozását mérőóra mutatja, az erőértékeket ebből a hitelesítési diagram segítségével lehet meghatározni. A dinamométerkengyelre ragasztott nyúlásmérő ellenállások valamint a nyomórúddal kapcsolt induktív utadók segítségével módunk volt az axiális nyomórúderőnek és a nyomórúdelmozdulásnak elektromos úton való mérésére vagy regisztrátum készítésére. A cellanyomás beállításához is ezt a dinamométert használtuk fel, míg a beállított nyomás állandónak tartását a tápegység automatikája, a kézi beavatkozás lehetőségével, biztosította.

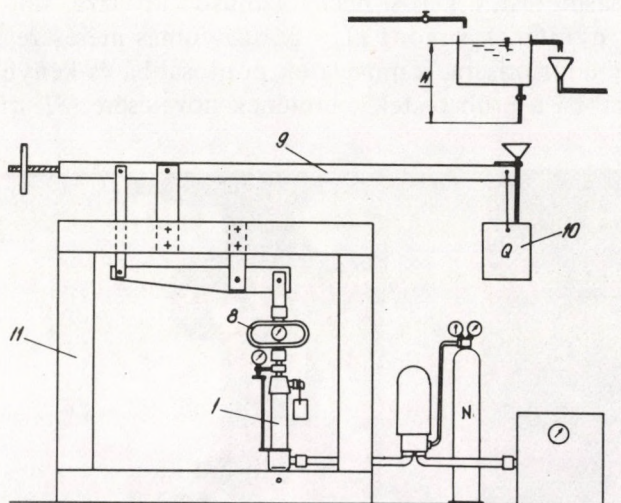
A továbbfejlesztett készülékek megtartották a patronos próbatest-szerelést, a nyomórúdon való közvetlen erőmérést és az ugyanott törté-



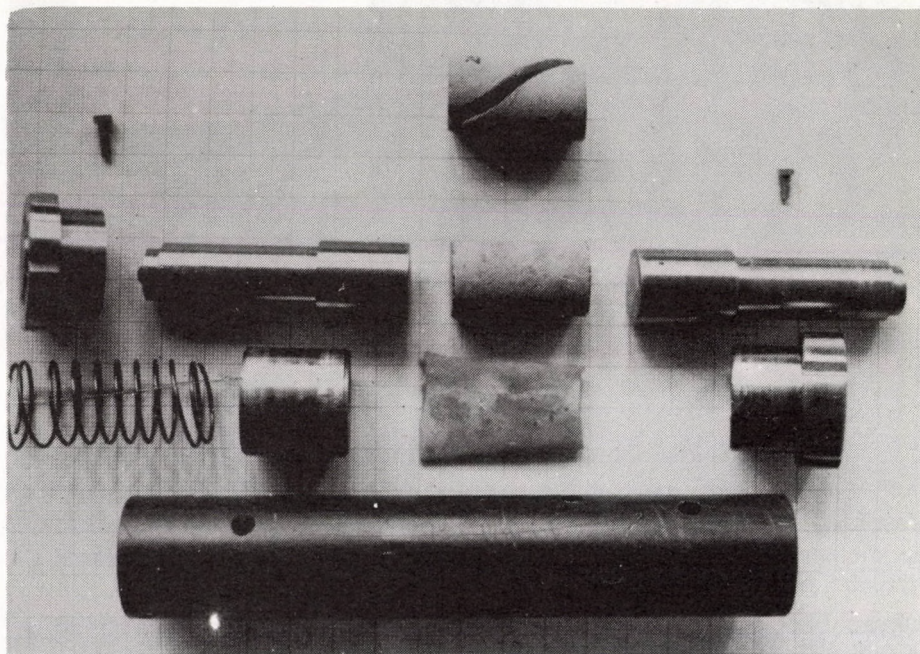


78. ábra. Patronos triaxiális nyomókészülék  
 $\phi 20$  mm-es próbatestek vizsgálatához





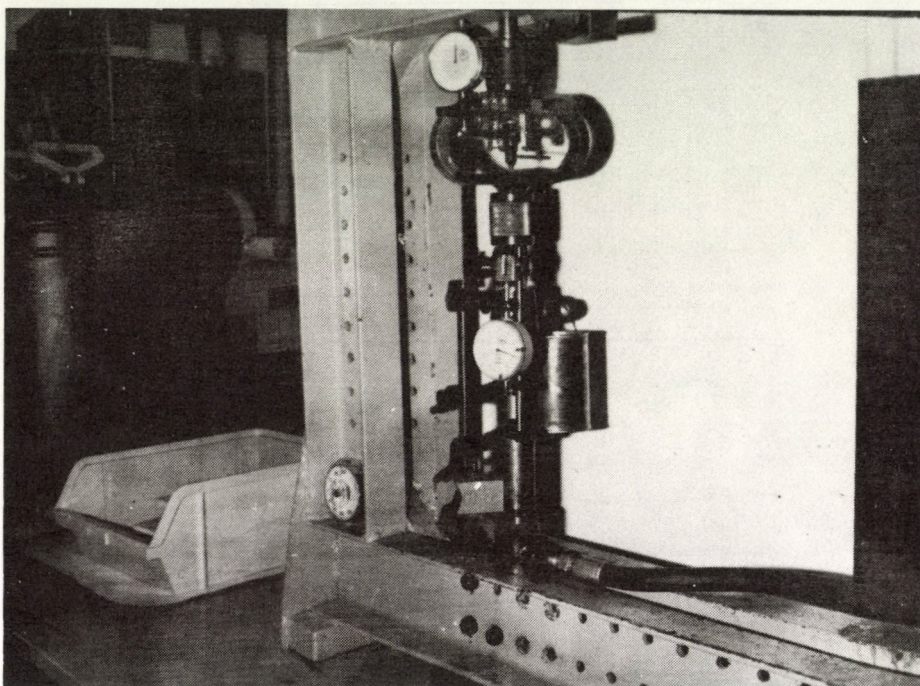
79. ábra. A B-1 terhelőberendezésének vázlata



80. ábra. A triaxiális készülék szétszerelt patronja. A nyomópofák között helyezkedik el a próbatest. Felül egy eltört próbatest látható.



nő elmozdulásmérést, a karos mechanizmuson át vízzel való terhelést. Lehetőséget nyújtanak viszont pl. a pórusnyomás mérésére, a térfogatváltozás meghatározására, a műveletek pontosabbá és kényelmesebbé tételére, továbbá a próbatestek méretének növelésére (81. ábra).



81. ábra. Triaxiális nyomókészülék erő és elmozdulásméréssel

### 6.5 A mérés

A triaxiális kísérleteket  $\phi 20 \times 33$  mm átlagos méretű próbatesteken végeztük, a pórusnyomás kivezetése nélkül. A mérés elsősorban törési kísérlet volt a törési határgörbék meghatározására, de mértük az axiális alakváltozást is a készülék nyomórúdjánál. Az alakváltozás mérése főként a törés észlelését segítette elő. Az alábbi műveletsorozatot ugyanabból a mintaanyagból készített több próbatesten, különböző  $p$  nyomáson végeztük el. Egy mérés a következőképpen folyt le:

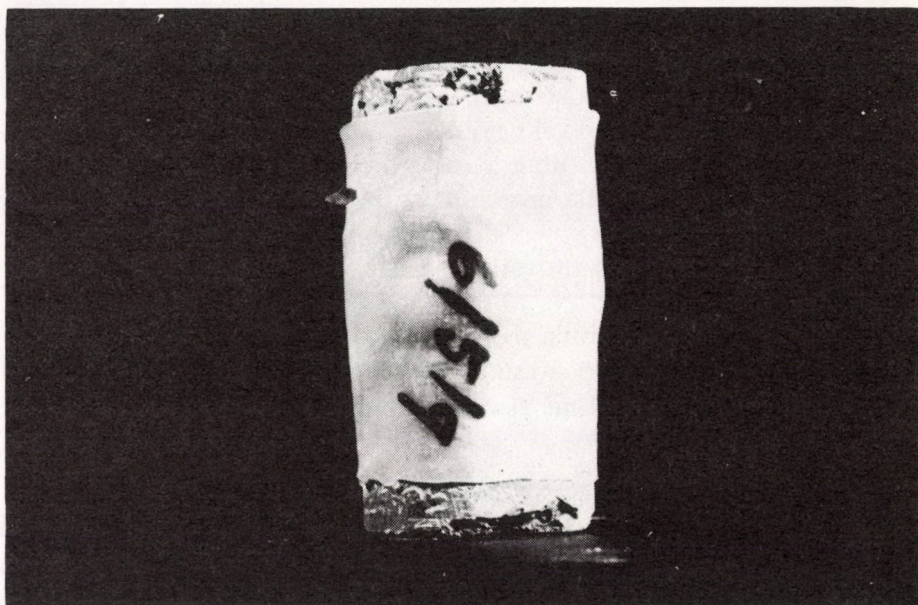
1. A próbatestet azonosítottuk, a rajta levő jelzést ellenőriztük.



Megmértük a próbatest átmérőjét, magasságát és tömegét, az adatokat jegyzőkönyvűrlapon rögzítettük

2. A próbatestet elláttuk a nyomóolaj behatolását akadályozó szigetelő bevonattal. (A bevonat BAYPREN MKB 526 jelű, ecsetelhető, tejszerű, száradás után gumiszerű bevonatot adó folyadék volt.)

3. A próbatestre szigetelő gumimembránt húztunk és beszereltük a patronba. A 82. ábrán a gumimembránt láthatjuk a már összetört próbatesten.



82. ábra

4. A patronat behelyeztük a nyomócellába és lezártuk a cellát.

5. Elhelyeztük az erő és elmozdulásmérőket, beállítottuk a terhelő mechanizmust. Az erőmérőt nulláztuk.

6. Rögzítettük (kitámasztással) a karos terhelő mechanizmust, a cellát feltöltöttük olajjal és a nyomást a kívánt  $\sigma_2 = p$  értékre növeltük. Ezt a  $d_r$  ismert ( $\phi 20$  mm) átmérőjű nyomórúdnak a  $p$  nyomás következtében a dinamométerre ható

$$P_p = (d_r^2 \pi p)/4$$



erőhatás figyelembevételével, a dinamométeren olvastuk le és a hidraulikus tápegység kézi szabályozásával állítottuk be. A nyomás tartását a tápegység automatikája végezte, az ellenőrzés a tápegységen lévő manométer segítségével történt.

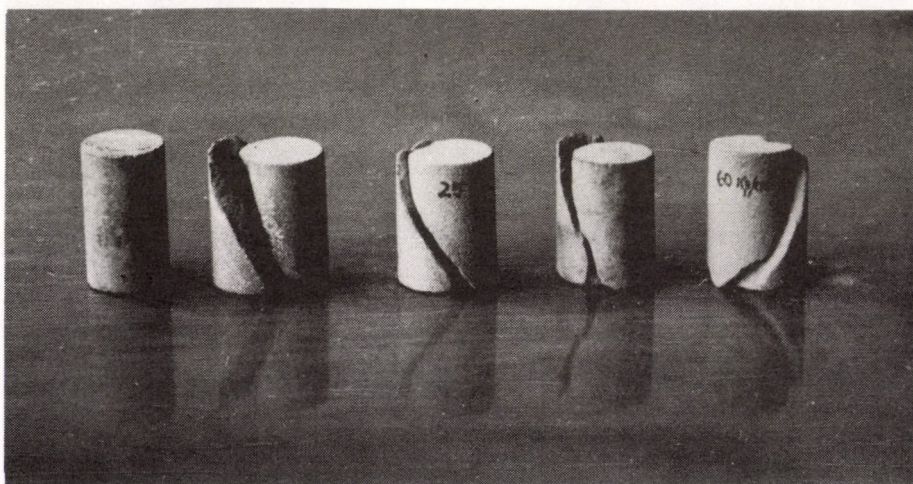
7. A karos mechanizmust a vízterhelés óvatos növelésével egyensúlyi helyzetbe hoztuk és felültettük a próbatestre. Ekkor volt a próbatestre ható axiális  $F$  erő zérus, a dinamométer pedig a  $P_p$ -nek megfelelő értéket mutatott. Az elmozdulásmérőt nulláztuk.

8. Az  $F$  axiális terhelőerőt a vízterhelés szabályozásával az előírt sebességgel növeltük a próbatest töréséig. Közben leolvastuk (és regisztráltuk) a  $D = P_p + F$  dinamométererőt és a nyomórúd  $\Delta L$  elmozdulását. A leolvasott összetartozó értékeket a jegyzőkönyvben rögzítettük, az időre vonatkozó adatokkal együtt.

9. A próbatest törése után a karos mechanizmust megemeltük és kitámasztottuk. A nyomást megszüntettük, az olajat leszívtuk, a patront a cellából kiemeltük.

10. A patront megtisztítottuk az olajtól és kiemeltük az eltört próbatestet.

11. Az eltört próbatesten megmértük a csúszólapnak a homloklappal bezárt  $\alpha$  szögét. A próbatestet összeillesztettük, összeragasztottuk és lefényképeztük, majd a méréssorozat feldolgozásának befejeztéig tároltuk (83. ábra).



83. ábra. Különböző cellanyomáson eltört márga próbatestek. Balszálen egy ép próbatest látható.



## 6.6 A törési vizsgálat kiértékelése

1. Kiszámítottuk a megmért és a jegyzőkönyvben rögzített értékekből a próbatest kezdeti átlagos átmérőjét ( $d_0$ ); a kezdeti átlagos magasságát ( $h_0$ ); ezekből a kezdeti átlagos keresztmetszetét ( $A_0$ ); kezdeti átlagos térfogatát ( $V_0$ ); a kezdeti átlagos tömegét ( $G_0$ ); majd a kezdeti átlagos térfogattömegét ( $\rho_0$ ).

2. Kiszámítottuk a törést okozó  $F_t$  axiális erőt:  $F_t = D_t - P_p$ , és ezzel a  $\sigma_t$  átlagos axiális törőerőt.

3. Megrajzoltuk a  $(\sigma, \tau)$  koordináta-rendszerben (megfelelő léptékben) a  $\sigma_1 \approx \sigma_t$  és a  $\sigma_2 \approx p$  értékeknek megfelelő *Mohr*-kört, a  $(\sigma_1, \sigma_2)$  törési feszültségi állapot ábrázolására.

4. A fenti eljárást a mérési sorozat minden mérésére elvégeztük, majd megrajzoltuk az így kapott *Mohr*-kör-sorozatot burkoló  $\tau(\sigma)$  törési határgörbét. Ha ez a görbe az adott szakaszon az egyenestől nem nagyon tért el, akkor egyenessel helyettesítettük.

5. Meghatároztuk az egyenes törési határgörbe egyenletének megfelelő  $\Phi$  és a  $c$  állandókat. (A gyakorlatban az egyes próbatestek szilárdságának szóródása miatt a *Mohr*-körök nagysága is szóródik, ezért a burkológörbe megrajzolása nehézséggel jár. Csak azt a sávot tudjuk kijelölni, amelyben a burkológörbe egy adott valószínűséggel fekszik. A határgörbe  $\Phi$  hajlásszögének becsléséhez felhasználtuk ellenőrzésképpen a próbatestről lemért  $\alpha$  csúszólapszöget. Evvel  $\Phi \approx 2\alpha - 90^\circ$ . A húzási zónában nem célszerű az egyenest extrapolálni).

6. A fenti módon nyert értékeket a nem víztelenített próbatesteken végzett gyors triaxiális törőkísérlet által szolgáltatott szilárdsági jellemzőknek tekintettük.

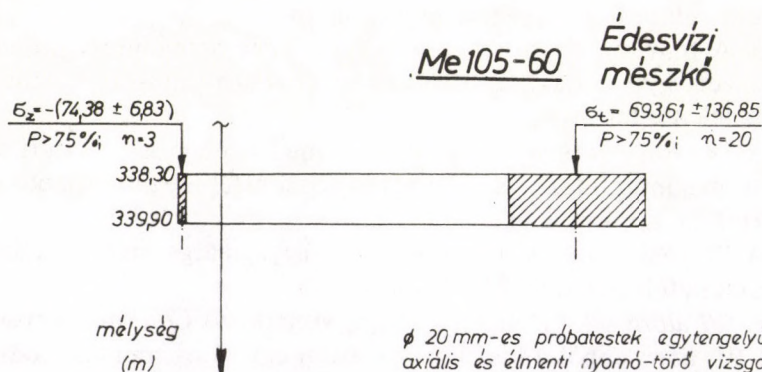
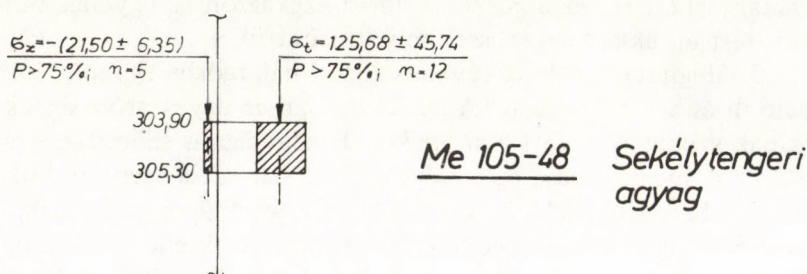
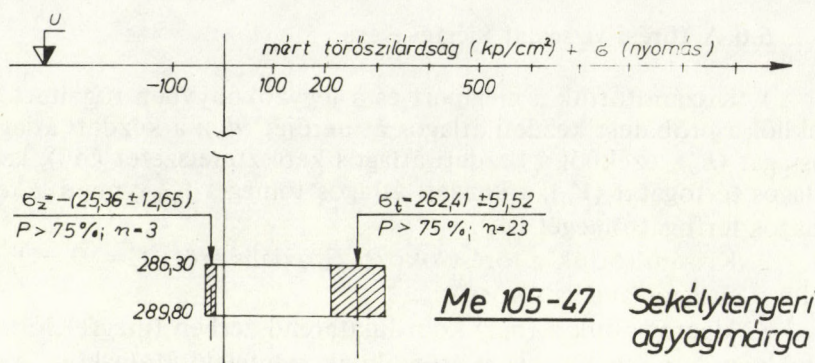
A 84–86. ábrákon a nagygyházi medencében lemélyített kutatófúrások magmintáinak axiális törési kísérlettel meghatározott szilárdsági értékeit tüntettük fel.

A 87–89. ábrákon a sekélytengeri agyagmárga próbatesteket és a tönkremeneteli határgörbét láthatjuk.

A 90. ábra sekélytengeri agyagra vonatkozó *Coulomb* egyenest mutat. A 91. ábra ebből a kísérletsorozatból egy réteg mentén elvált próbatestet mutat be, a 92. ábra pedig egy általános tönkremenetelt.

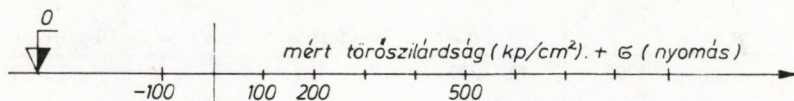
A 93.–98. ábrasorozat a nagygyházi kísérletek közül mutat néhány eredményt és összetört próbatestet.

A 4. táblázat összefoglalóan tartalmazza a *Coulomb*-féle törési határfeltétel paramétereinek becsült értékeit.

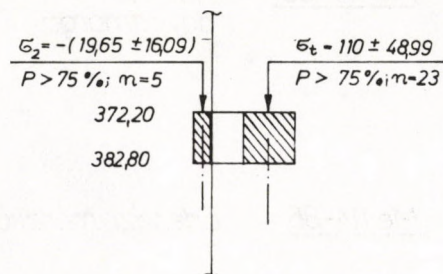


ø 20 mm-es próbatestek egytengelyű axiális és elemi nyomó-törő vizsgálatából nyert nyomó és húzószilárdsági értékek P > 75 % valószínűséghez tartozó szóródási mezője.

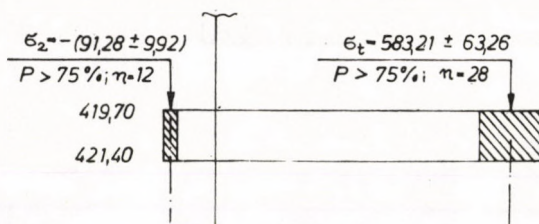




N60-6 Globuláris agyagmárga



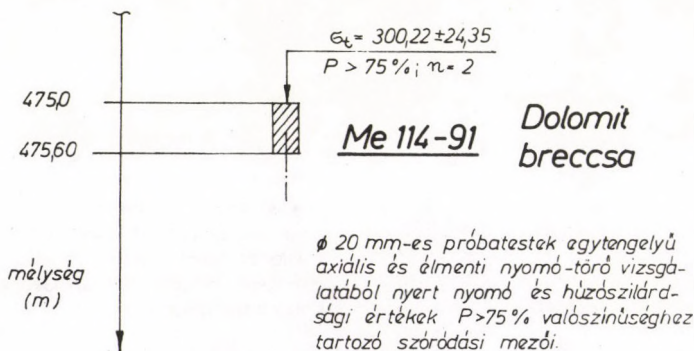
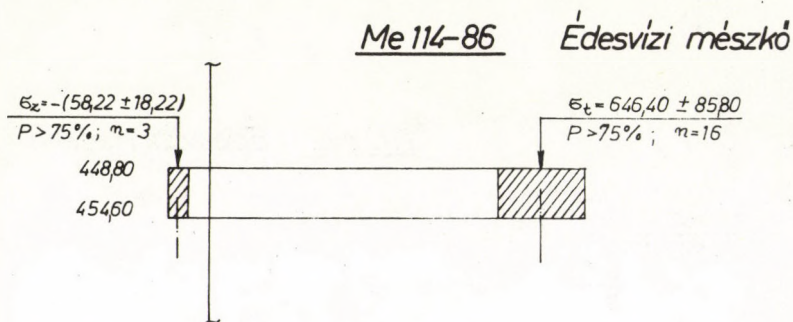
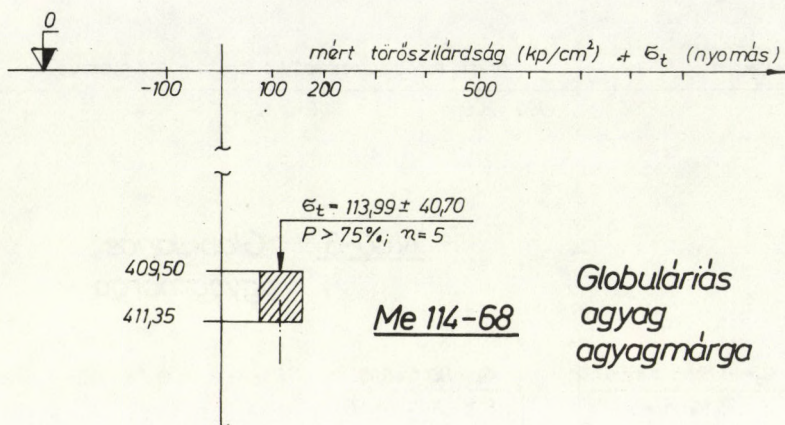
N60-22 Édesvízi mészkő



mélység  
(m)

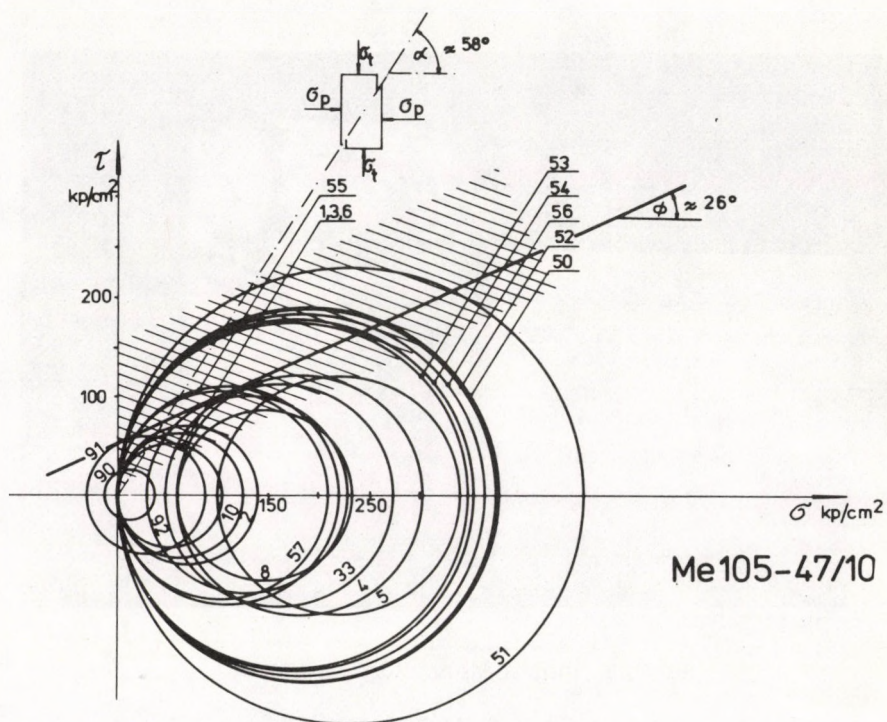
Ø 20 mm-es próbatestek egytengelyű,  
 axiális és élmenti nyomó-törő vizsgálá-  
 latából nyert nyomó és húzószilárdsági  
 értékek  $P > 75 \%$  valószínűséghez tartozó  
 szóródási mezői.

Fúrás: N60.



Fúrás: Me 114.

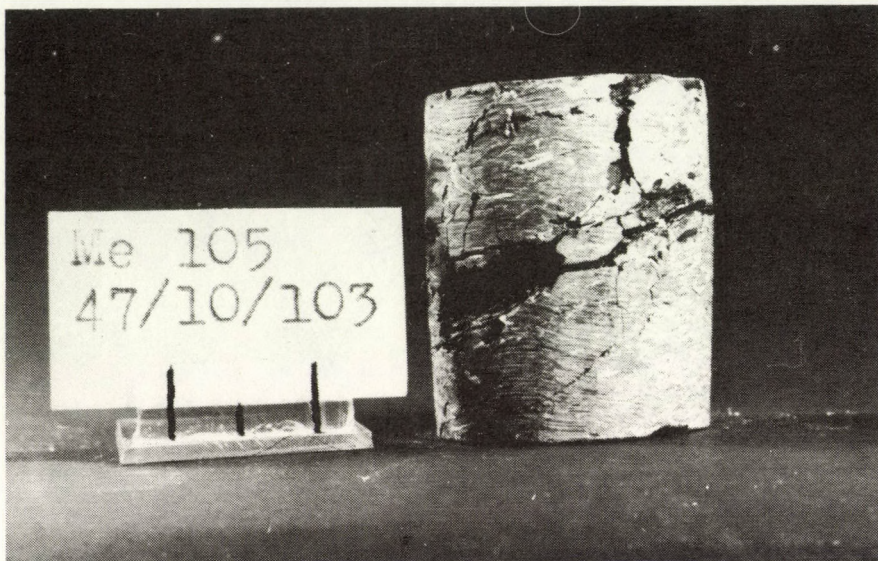




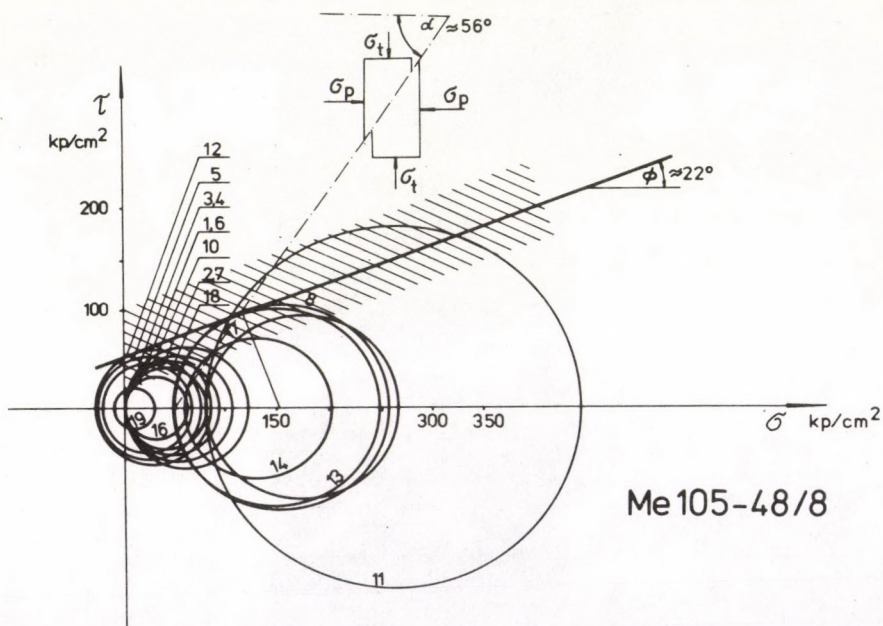
87. ábra.



88. ábra.

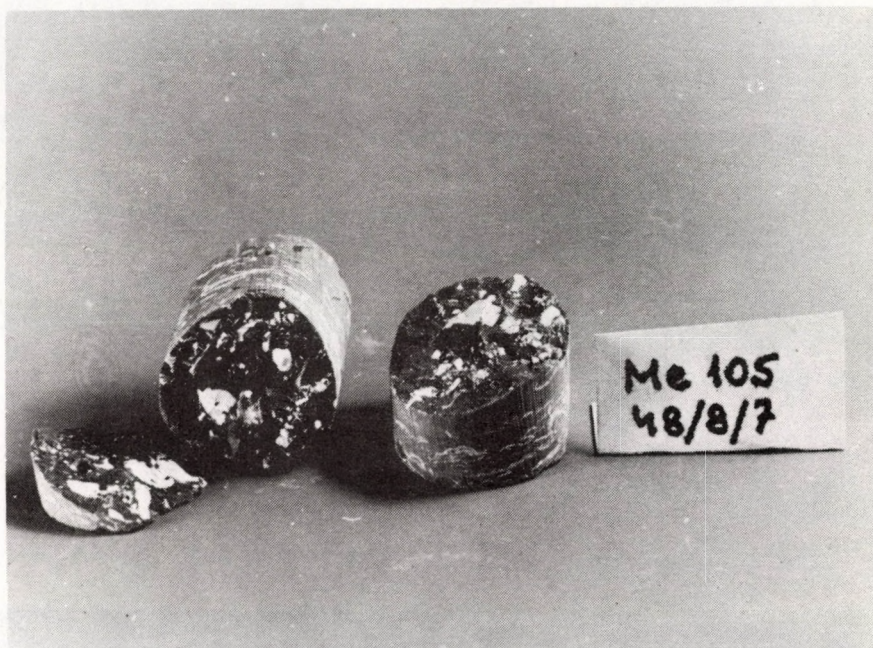


89. ábra. Hordósodás az eltört próbatesten



90. ábra.



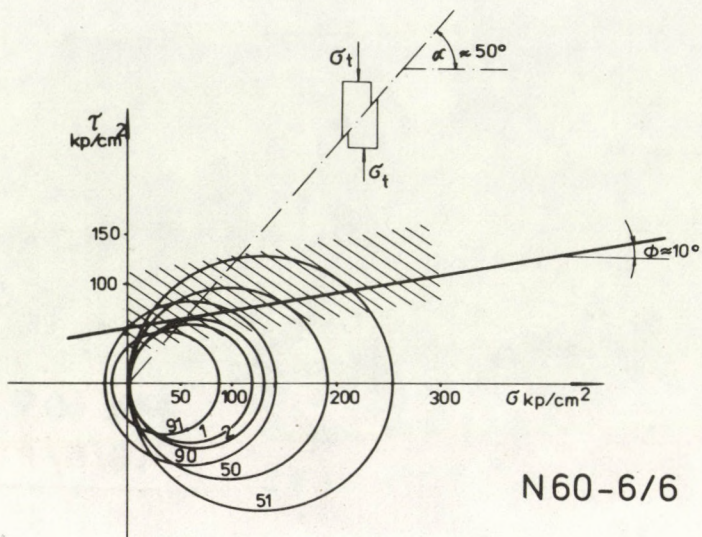


91. ábra.



92. ábra.



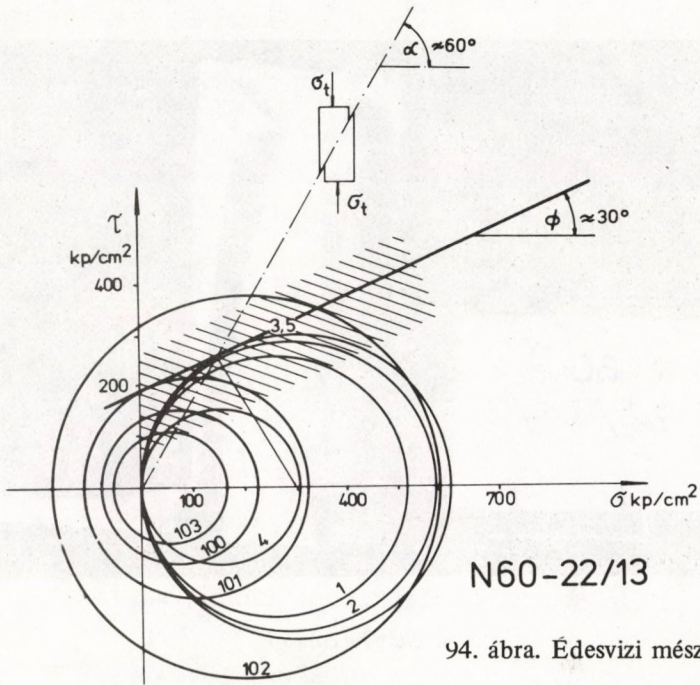


93. ábra. Globuláris agyagmárga

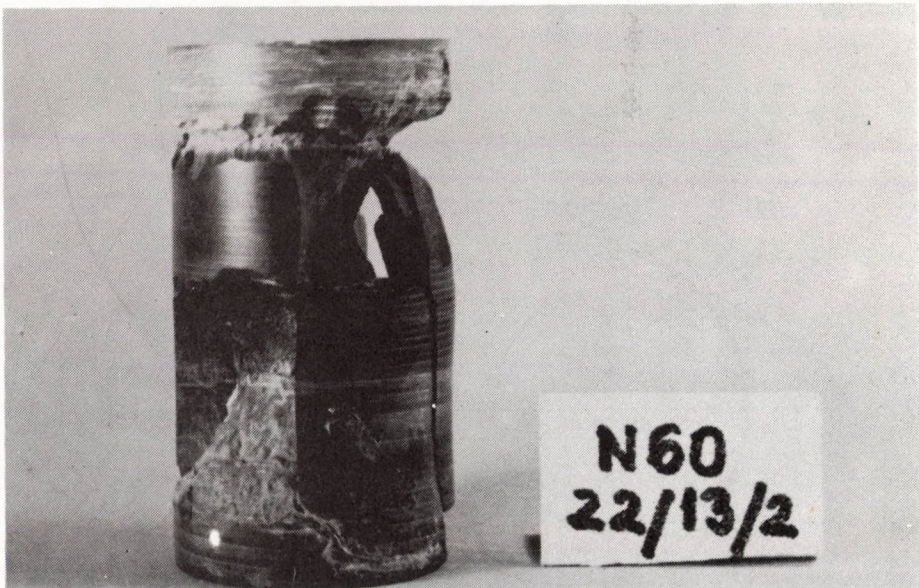


95. ábra.



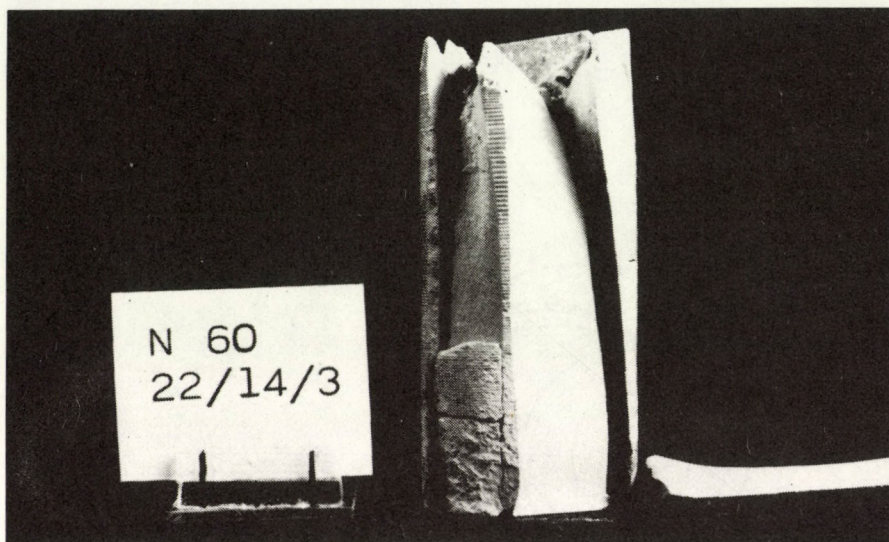


94. ábra. Édesvízi mészkő

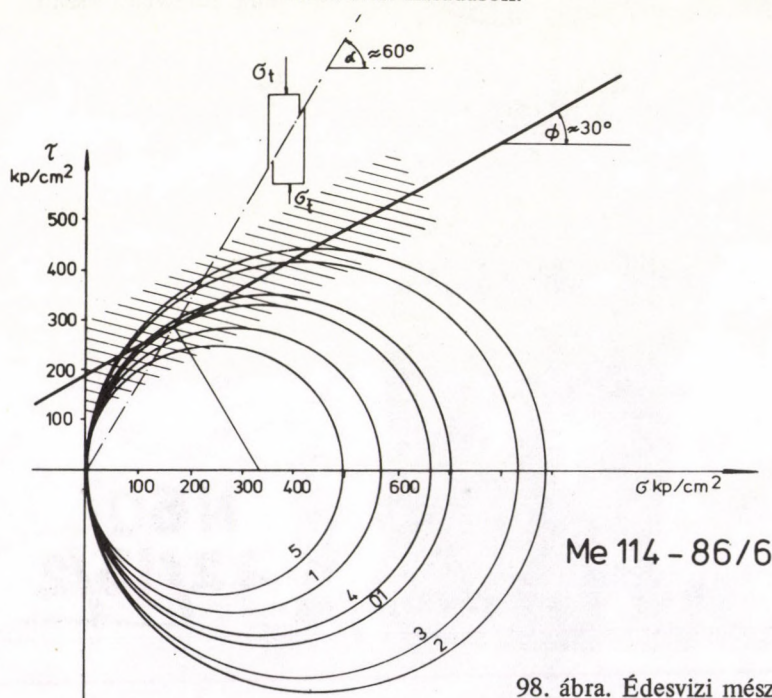


96. ábra





97. ábra. Ivelt hasadások.



98. ábra. Édesvizi mészkő



4. táblázat

Minta	Anyag	$\alpha^\circ$	$\Phi^\circ$	$\text{tg}\Phi$	$c_{\min}$	$c_{\max}$
Me 105-47/9	Sekélytengeri	48	6	0,10	60	170
Me 105-47/10	agyagmárga	58	26	0,48	10	150
Me 105-47/11		59	28	0,53	50	120
Me 105-48/8	Sekélytengeri	56	22	0,40	15	100
Me 105-48/9	agyag	47	4	0,07	5	50
Me 105-48/10		47	4	0,07	75	140
Me 105-60/14	Édesvízi	60	30	0,57	40	220
Me 105-60/15	mészkö	63	36	0,72	50	300
Me 105-60/16		55	20	0,36	50	300
N 60-6/4	Globuláriás	55	20	0,36	25	100
N 60-6/5	agyagmárga	50	10	0,17	10	300
N 60-6/6		50	10	0,17	30	110
N 60-6/14		54	18	0,32	10	30
N 60-22/13	Édesvízi	60	30	0,57	80	250
N 60-22/14	mészkö	60	30	0,57	70	230
N 60-22/15		65	40	0,83	50	120
Me 114-68	Globuláriás agyag - agyagmárga	53	16	0,28	10	60
Me 114-86/5	Édesvízi	50	10	0,17	100	300
Me 114-86/6	mészkö	60	30	0,57	100	300
Me 114-86/9		60	30	0,57	100	230
Me 114-91/3	Dolomit breccsa	65	40	0,83	25	100



A felhasznált próbatestek különböző arányúak voltak, a csaknem azonos  $d \approx 20$  mm átmérőkhöz különböző  $h$  magasságok tartoztak. A koronafúróval kimunkált próbatestek átmérői nem nagyon szóródtak, de a próbatestek hosszát a megmunkálás során a sík és sima véglapra való törekvés befolyásolta. Az arányoknak az egyedi törőszilárdság kiszámításánál nem vettük figyelembe a hatását.

A próbatestek zömökségének a törőszilárdságára való hatását úgy vizsgáltuk meg, hogy a mért és kiszámított  $\sigma_t$  egyedi törőszilárdságértékeket a  $d/h$  arány függvényében felrajzoltuk, illetve ezen pontok koordinátáit figyelembe véve meghatároztuk az erre a pontsorra illeszthető egyenest. A  $(\sigma_t, d/h)$  koordinátarendszerben ennek az egyenesnek az egyenlete:

$$\sigma_t = \sigma_{t\infty} + A \frac{d_0}{h_0}$$

ahol  $d_0$  és  $h_0$  a próbatest „kísérlet előtti” átlagos átmérője és átlagos magassága. Összetett kísérleteknél, ahol esetleg az egyes mérési fázisok között is meghatároztuk a próbatest méreteit, a fenti értékek a törés előtti utolsó mérés eredményeire vonatkoznak. A  $\sigma_{t\infty}$  érték a végtelen hosszú próbatestre extrapolált törőszilárdság.

Meghatároztuk továbbá az  $R$  regressziós egyenest, azaz a változók felcserélésével végzett illesztéssel adódó egyenest, és az  $r$  korrelációs együtthatót is. A számítás során figyelembe vett pontok  $n$  száma esetenként kissé eltért a  $\sigma_{tA}$  számításának alapjául szolgáló pontszámtól. A vizsgált esetekben az édesvizi mészköveknél a  $\sigma_t$  törőszilárdság és a  $d/h$  próbatestarány között csak gyenge korreláció volt, míg az agyagnál az agyagmárgánál a próbatestarány a mérhető törőszilárdságot jelentősen befolyásolta. A probléma további vizsgálatokat kíván meg annál is inkább, mert a kapcsolatot csakis  $\phi 20$  mm körüli méretű próbatesteken vizsgáltuk. Az eredményeket az 5. táblázat tartalmazza, ahol  $P$  a megbízhatósági szint [%],  $n$  pedig a mérések száma.

## 6.7 A mérési eredményeket befolyásoló tényezők

A próbatest valóságos test, általában nem tökéletesen homogén, izotróp, folytonos, ezért az előzőek szerint meghatározott  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  és  $\sigma_y$  értékek nem pontos főfeszültségek. További torzulást okoz a próbatest homloklapja és az azt nyomó lap (az üllő illetve a nyomórúd)



5. táblázat

Réteg	Anyag	Rétegszilárdság ( $\sigma_{tA}$ )	P%	n	Törőszilárdság ( $\sigma_t$ )	n
Me 105–47	Sekélytengeri agyagmárga	$262,41 \pm 51,52$	75	23	$106 + 162 \frac{d}{h}$	28
Me 105–48	Sekélytengeri agyag	$125,68 \pm 45,74$	75	12	$1,86 + 186 \frac{d}{h}$	18
Me 105–60	Édesvízi mészkő	$693,51 \pm 136,85$	75	20	$729 - 3,16 \frac{d}{h}$	20
N 60–6	Globuláris agyagmárga	$110 \pm 48,99$	75	23	$1,44 + 141 \frac{d}{h}$	27
N 60–22	Édesvízi mészkő	$583,21 \pm 63,26$	75	28	$585 + 15,6 \frac{d}{h}$	29
Me 114–86	Édesvízi mészkő	$646,40 \pm 85,80$	75	16	$644 + 9,6 \frac{d}{h}$	18



közötti súrlódás, amely a homloklap szabad deformációját gátolja, a homloklapot mintegy „abroncsolja”. Ez egyrészt a próbatest alakjának hordóssá válását okozza (emiat gond a keresztirányú deformáció mérési eredményeinek értékelése), másrészt ennek következtében a próbatest látszólag nagyobb szilárdságúvá válik. Ezen körülmények miatt az előzőekben megadott módszerrel kiszámolt  $\sigma_t$  érték a próbatest geometriai viszonyinak, de abszolút méreteinek is a függvénye.

A kísérlet megtervezésekor a kiértékeléshez felállított feltételek közül tehát egyik sem teljesül teljes egészében. Az előzőek alapján végrehajtott kísérletek és számítási mód alapján nyert eredmények mégis igen sok esetben a gyakorlatban jól felhasználható, kielégítő közelítő értékeket szolgáltatnak. A felhasználáskor természetesen kellő kritikával kell kezelni az ideális és a valóságos körülmények közötti eltéréseket. Szükség esetén a nyert eredményeket különféle helyesbítési eljárásoknak vetjük alá, hogy azokat a valóságos körülményekhez közelítsük.

Például a porózus anyagok nem felelnek meg a folytonossági feltételnek. A pórusokat gázok és folyadék tölti ki és ezek a fázisok a többnyire összefüggő pórusrendszerben a test deformációja következtében előálló nyomáskülönbségek hatására áramlanak. Ez a körülmény a test szilárdságára számottevő hatással van. A közetek mindig porózusok, pórustérfogatuk 1% és 20% között van. A pórusokat kitöltő fázis az abban kialakuló  $u$  pórusnyomás révén részt vesz a terhelés hordozásában, ez a részvétel azonban megváltozik akkor, ha a pórusokban az anyag elváltozása vagy áramlása révén a pórusnyomás megváltozik. A triaxiális kísérletet ilyen esetben is az előzőeknek megfelelően kell végrehajtani, de meg kell mérni az  $u$  pórusnyomást is és helyesbítésül a Mohr-kör átmérőjét  $(\sigma_t - u) - (\sigma_p - u)$  értékkel kell megrajzolni. Nagy mértékű porozitás a test mérhető törőszilárdságát erősen befolyásolja, mert ilyenkor pórusszerkezet deformációja alkotja a test teljes térfogati deformációja nagyobb részét, ehhez képest a szilárd fázis térfogata alig változik. A terhelés során így a porozitási jellemzők jelentősen megváltozhatnak. Emiat az újabb törekvések (Roscoe) a törőszilárdságot nem a  $\tau(\sigma)$  határgörbével, hanem egy  $\psi(\tau, \sigma, e)$  határfelülettel jellemzik, ahol  $e$  egy porozitási jellemző, például a pórusszám, a pórushányad reciproka. Az eljárás tulajdonképpen a Hooke-testre kidolgozott elméletnek a valóságos kísérleti eredményekhez való közelítése.

A kőzetminták törését kísérő jellemzők nagy szóródást mutatnak, a statisztikai kiértékelést csak kellő számú próbatesten végzett kísérlet alapján lehet elvégezni. Ha a próbatestek kimunkálására csak kevés a-



anyag áll rendelkezésre, mint pl. fúrómagok esetén, célszerűbb a kevés nagyobb próbatest helyett több kisebbet készíteni.

Az eredmények összehasonlíthatóságára azonban fel kell tární a különböző méretű és méretarányú próbatestek említett eljárással előállított törőszilárdsága közötti kapcsolatot.

A jövőben folytatandó kísérleteinknél a triaxiális alakváltozási kísérletek nagyobb pontosságú végrehajtására törekszünk. A keresztirányú alakváltozás mérése csak rideg anyagoknál kielégítő pontosságú, lebonyolítása akkor is nehézkes. Az irodalmi adatok alapján a térfogatváltozás mérése kedvezőbb eredményt adhat, bár kidolgozott módszerek csak elárasztható próbatestekre állnak rendelkezésre. Az alakváltozási jellemzők, pl. a rugalmassági modulus és a *Poisson* tényező ilyen módon való meghatározása körülményesnek látszik.

Járhatóbbnak látszik a hosszúidejű triaxiális kísérletek (kúszás, relaxáció) segítségével törekedni az alakváltozási jellemzők meghatározására. Ezeknél, a kísérleti körülményeknek főként a nyomás és hőmérsékleti értékeknek a hosszú időn át való tartása és a regisztráló berendezés stabilitásának biztosítása okoz gondot. A szilárdsági jellemzők időtől való függősege azonban rákényszerít ilyen vizsgálatok végzésére. A gyors kísérleteknél a törőszilárdságnak a terhelési sebességtől való függését kell tisztázni. Hasonló probléma az anyag néhány fő jellemzőjétől, pl. nedvességtartalomtól, stb. való függés. Az összetett kísérletek eredményeinek kellő biztonsággal való kiértékeléséhez természetesen igen nagyszámú mérési adatra van szükség.





## KÖRSZELVÉNYŰ ÜREG KÖRÜLI MECHANIKAI ÁLLAPOT

## 7.1 Előzetes megjegyzések

Ebben a fejezetben körszelvényű üregek körül kialakuló feszültségi-, deformációs és elmozdulásmező meghatározásával foglalkozunk. Ezzel a vizsgálattal jelen esetben nem a vágatok biztosításának tárgyalását kívánjuk előkészíteni, hanem a kőzetjellemzők in-situ meghatározásához szükséges elméleti összefüggéseket bemutatni.

A primér állapotot úi. közvetlenül meghatározni nem lehet, mert a mérőberendezéseknek a földkéregbe történő bejuttatásával az eredeti feszültségi és alakváltozási állapot megváltozik. Így regisztrálni csupán az adott primér állapothoz tartozó – és a kőzettömb megzavarásának módjától függő – szekunder állapotot tudjuk. Azonban a jellemző paraméterek közvetett úton történő meghatározásának nincsen akadálya, mert a kialakuló szekunder állapot többek között a primér állapotnak is függvénye és ha ismeretes, hogy egy adott behatolás – pl. egy állandó keresztmetszetű fúrólýuk nyitása – eredményeként létrejövő deformálódás (amely mérhető) milyen kapcsolatban áll a primér állapottal, akkor a feszültség- és mozgásmező jellemző primér paraméterei meghatározhatók.

Ezek alapján a szükséges in-situ módszerek kidolgozásánál két alapvető szempontot kell figyelembe venni:

1. A mérendő deformálódás és a primér jellemzők közötti függvénykapcsolat ismert és lehetőség szerinti egyszerű legyen.
2. Lehetőség szerint minden paramétert in-situ, könnyen végrehajtható mérési eredményből lehessen meghatározni.

Ezeket a feltételeket a körszelvényű fúrólýukokban mért tangenciális fajlagos nyúlás, illetve radiális elmozdulás értékek messzemenően kielégítik, így a következő fejezetben közölt módszerek – fúrólýukokban eszközölt – bányabeli mérésekre épülnek.

A következőkben az in-situ mérések kiértékeléséhez szükséges fú-



rólyukak körüli mechanikai mező összefüggéseivel foglalkozunk.

## 7.2 A szekunder mező modellje

A szekunder állapot jellemzésénél abból a dinamikai alapelvből indultak ki, hogy a bányaműveléshez szükséges bármilyen alakú üregek nyitása a kőzetben a korábbi bármely pontban  $F_p$  feszültségtenzorral jellemzett primér feszültségek módosulását eredményezi. Ezek a módosító  $F'$  feszültségtenzorral jellemzett feszültségek az üreg alakjától függnnek.  $F_p$  és  $F'$  együttes hatására alakul ki az  $(F_p + F')$  szekunder feszültségállapot. Ha adott az üreg alakja, ezzel adott az  $F'$  is, tehát az  $F = F_p + F'$  szekunder feszültségállapot ez esetben  $F'$  függvénye.

A következőkben az általános térbeli primér mezőben kialakított tetszőleges tengelyiránnyal rendelkező körszelvényű fúrólyuk körüli feszültségeloszlás meghatározásával foglalkozunk.

## 7.3 A szekunder állapot meghatározása

Az általános orientációjú primér feszültségmező – mint azt már az 1. fejezetben láttuk – az

$$F_p = \begin{vmatrix} p_x & t_{yz} & t_{zx} \\ t_{xy} & p_y & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & p_z \end{vmatrix} = F_p \langle x, y, z \rangle \quad (1)$$

feszültségtenzorral jellemezhető, amely a fúrólyuk  $z$  tengelyirányához illesztett polárkoordinátarendszerben

$$F_p = \begin{vmatrix} p_r & t_{\varphi r} & t_{zr} \\ t_{r\varphi} & p_\varphi & t_{z\varphi} \\ t_{rz} & t_{\varphi z} & p_z \end{vmatrix} = F_p \langle r, \varphi, z \rangle$$

alakot ölti. Ennek komponensei

$$p_r = \frac{1}{2} (p_x + p_y) + \frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi,$$



$$\begin{aligned}
 p_\varphi &= \frac{1}{2}(p_x + p_y) - \frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi - t_{xy} \sin 2\varphi, \\
 t_{r\varphi} &= -\frac{1}{2}(p_x - p_y) \sin 2\varphi + t_{xy} \cos 2\varphi, \\
 t_{\varphi z} &= t_{yz} \cos \varphi - t_{zx} \sin \varphi, \\
 t_{zr} &= t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi.
 \end{aligned} \tag{2}$$

A megoldás meghatározása a kerületi és kezdeti feltételek ismeretében a kontinuummechanika alapegyenletei felhasználásával történhet. Ezek az egyenletek jelen feladatunknál a következők:

#### *Egyensúlyi egyenletek*

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0, \\
 \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} &= 0, \\
 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0.
 \end{aligned}$$

#### *Geometriai egyenletek*

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}, \\
 \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & \gamma_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \\
 \varepsilon_z &= 0, & \gamma_{zr} &= \frac{\partial u_z}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

#### *Fizikai egyenletek*

$$\sigma_r^* + \tau \dot{\sigma}_r^* = 2G \left[ \varepsilon_r + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) \right] + 2\eta \left[ \dot{\varepsilon}_r + \frac{\mu}{m-2} (\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi) \right],$$

$$\sigma_{\varphi}^* + \tau \dot{\sigma}_{\varphi}^* = 2G \left[ \varepsilon_{\varphi} + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) \right] + 2\eta \left[ \dot{\varepsilon}_{\varphi} + \frac{\mu}{m-2} (\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_{\varphi}) \right],$$

$$\sigma_z^* + \tau \dot{\sigma}_z^* = \frac{2G}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi}) + \frac{2\eta}{m-2} (\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_{\varphi}),$$

$$\tau_{r\varphi}^* + \tau \dot{\tau}_{r\varphi}^* = G\gamma_{r\varphi} + \eta \dot{\gamma}_{r\varphi},$$

$$\tau_{pz}^* + \tau \dot{\tau}_{pz}^* = G\gamma_{pz} + \eta \dot{\gamma}_{pz},$$

$$\tau_{zr}^* + \tau \dot{\tau}_{zr}^* = G\gamma_{zr} + \eta \dot{\gamma}_{zr},$$

ahol

$$\mu = \frac{1}{3} \left[ \frac{G}{\eta} \tau(m+1) - (m-2) \right].$$

A feladat megoldását *Asszonyi Csaba* „Rheological Field Around Mine-openings of Circular Cross-section. Part II. *Acta Geodaetica, Geophysica et montanistica* 8 (1973). p: 3–54.” tanulmányában körszimmetrikus vágatbiztosítás esetére leközölte. Ez alapján:

*Tercier feszültségmező:*

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2} (p_x + p_y) \left\{ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 [1 - \alpha(1 - e^{-\beta t})] \right\} + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \left\{ 1 - \left[ 4 \left( \frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right] [1 - \psi(1 - e^{-\delta t})] \right\}, \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{1}{2} (p_x + p_y) \left\{ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 [1 - \alpha(1 - e^{-\beta t})] \right\} - \\ &- \left[ \frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \left\{ 1 + 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 [1 - \psi(1 - e^{-\delta t})] \right\}, \\ \sigma_z &= p_z - \left[ \frac{1}{2} (p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \frac{4}{m} \left( \frac{R}{r} \right)^2 [1 - \psi(1 - e^{-\delta t})], \\ \tau_{r\varphi} &= - \left[ \frac{1}{2} (p_x - p_y) \sin 2\varphi - t_{xy} \cos 2\varphi \right] \times \\ &\times \left\{ 1 + \left[ 2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right] [1 - \psi(1 - e^{-\delta t})] \right\}, \\ \tau_{\varphi z} &= [t_{yz} \cos \varphi - t_{zx} \sin \varphi] \left\{ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 [1 - \varrho(1 - e^{-\omega t})] \right\}, \end{aligned}$$



$$\tau_{zr} = [t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi] \left\{ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 [1 - \varrho(1 - e^{-\omega t})] \right\},$$

*Tercier deformációsmező:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{1}{2}(p_x + p_y) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{\alpha}{\xi R} (1 - e^{-\beta t}) - \left[ \frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \times \\ &\quad \times \frac{m}{3m-4} \left[ 4 \frac{m-1}{m} \left( \frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right] \frac{\psi}{\xi R} (1 - e^{-\delta t}), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2}(p_x + p_y) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{\alpha}{\xi R} (1 - e^{-\beta t}) + \left[ \frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \times \\ &\quad \times \frac{m}{3m-4} \left[ 4 \frac{m-1}{m} \left( \frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right] \frac{\psi}{\xi R} (1 - e^{-\delta t}), \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{r\varphi} &= -\left[ \frac{1}{2}(p_x - p_y) \sin 2\varphi - t_{xy} \cos 2\varphi \right] \times \\ &\quad \times \frac{m}{3m-4} \left[ 2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right] \frac{\psi}{\xi R} (1 - e^{-\delta t}), \\ \gamma_{\varphi z} &= [t_{yz} \cos \varphi - t_{zx} \sin \varphi] \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{\varrho}{\kappa R} (1 - e^{-\omega t}), \\ \gamma_{zr} &= [t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi] \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{\varrho}{\kappa R} (1 - e^{-\omega t}), \end{aligned}$$

*Tercier elmozdulásmező:*

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{2}(p_x + p_y) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{\alpha}{\xi} (1 - e^{-\beta t}) + \left[ \frac{1}{2}(p_x - p_y) \cos 2\varphi + t_{xy} \sin 2\varphi \right] \times \\ &\quad \times \frac{m}{3m-4} \left[ 4 \frac{m-1}{m} \left( \frac{R}{r} \right)^2 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \frac{\psi}{\xi} (1 - e^{-\delta t}), \\ u_\varphi &= -\left[ \frac{1}{2}(p_x - p_y) \sin 2\varphi - t_{xy} \cos 2\varphi \right] \times \\ &\quad \times \frac{m}{3m-4} \left[ 2 \frac{m-2}{m} \left( \frac{R}{r} \right)^2 + \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \frac{\psi}{\xi} (1 - e^{-\delta t}), \end{aligned}$$

$$u_z = [t_{yz} \sin \varphi + t_{zx} \cos \varphi] \left( \frac{R}{r} \right) \frac{\varrho}{\kappa} (1 - e^{-\omega t}),$$

ahol

$$\alpha = \frac{\xi R}{\xi R + 2G},$$

$$\beta = \frac{\xi R + 2G}{\tau \xi R + 2\eta},$$

$$\psi = \frac{\xi R}{\xi R + 2G \frac{m}{3m-4}},$$

$$\delta = \frac{\xi R + 2G \frac{m}{3m-4}}{\tau \xi R + 2\eta \frac{m}{3m-4}},$$

$$\varrho = \frac{\kappa R}{G + \kappa R},$$

$$\omega = \frac{G + \kappa R}{\tau \kappa R + \eta}.$$

A  $\xi$  és  $\kappa$  állandók a biztosítás tulajdonságait kifejező értékek. Biztosítás nélküli esetben – ami megfelel az in-situ mérésnél használatos fűrőlyukak körüli állapotnak – a megoldás az

$$\alpha = 0; \quad \frac{\alpha}{\xi} = \frac{R}{2G}; \quad \beta = \frac{G}{\eta} = \delta = \omega;$$

$$\psi = 0; \quad \frac{\psi}{\xi} = \frac{R}{2G} \frac{3m-4}{m};$$

$$\rho = 0; \quad \frac{\rho}{\kappa} = \frac{1}{G};$$

formájú behelyettesítéssel vezethető le.



## A PRIMÉR FESZÜLTSEGEK ÉS KÖZETJELLEMZŐK IN-SITU MEGHATÁROZÁSA

### 8.1 Az in-situ mérések elve

A 2.8 pontban bemutatottuk, hogy reológiai környezetben létrehozott üregnyitások körül kialakuló feszültségi-, deformációs- és elmozdulásállapot a *Hooke*-törvény által meghatározott állapotokhoz konvergál. Az átmenet milyenségét a reológiai jellemzők határozzák meg. Ezért a következőkben az egyszerűbb tárgyalás kedvéért a kőzetkörnyezetet lineárisan rugalmasnak – azaz két anyagállandóval meghatározottnak – tekintjük.

Igy jelen esetben a primér állapot jellemző paramétereinek a meghatározása a  $p_1, p_2, p_3$  [kp/cm<sup>2</sup>] főfeszültségek nagyságának és irányának az  $E$  [kp/cm<sup>2</sup>] rugalmassági modulusnak azaz  $m$  *Poisson*-féle számnak a megállapítását jelenti. Ezen paraméterek in-situ meghatározása közvetett úton lehetséges oly módon, hogy megfelelő üregnyitás után kialakuló secunder állapotot regisztráljuk és ezen secunder állapotból a levezetett összefüggések segítségével állítjuk elő a primér jellemzőket, ugyanis az üregnyitás után kialakuló secunder állapot a primer jellemzők függvénye:

$$F_{\text{secunder}} = F(p_1, p_2, p_3, e_1, e_2, e_3, E, m),$$

$$D_{\text{secunder}} = D(p_1, p_2, p_3, e_1, e_2, e_3, E, m).$$

A gyakorlat szempontjából a körszelvényű fúrólyukak kerületén észlelt fajlagos tangenciális  $[\epsilon_\varphi]_R$  megnyúlások és  $[u_r]_R$  radiális elmozdulások képezik azokat a mérési eredményeket, amelyek könnyen előállíthatók, s amelyekből a kívánt paraméterek viszonylag egyszerűen számíthatók.

A kőzetkörnyezet rugalmas alakváltozása miatt a furatkészítéssel együttjáró deformációk már a fúrás művelete közben létrejönnek, így



azokat mérni nem tudjuk, mivel a fúró a befelé elmozduló anyagot eltávolítja, s körszelvényű lesz. Ha azonban a kőzetből egy, a furatot is magábfoglaló koncentrikus kőzethengert a környezet nyomásától felszabadítunk, akkor ez deformálódik.

Az egyes kerületi pontok  $[\epsilon_\varphi]_R$  alakváltozását és  $[u_r]_R$  elmozdulását mérve a primér paraméterek azonban már meghatározhatók.

## 8.2 A térbeli állapot előállítása

*Kapolyi László* kandidátusi értekezése részletesen tárgyalja a primér kőzetjellemzők in-situ meghatározásának lehetséges módjait. Itt bemutatásra kerül, hogy a térbeli feszültségállapot meghatározásához legalább 3 nem egy síkba eső fúrólukban kell méréseket végezni. Minden egyes fúróluknál eszközölt mérésnél a furat tengelyére merőleges sík feszültségi és deformációs állapotának hatását érzékeljük. A disszertáció bemutatja a primér paraméterek determinisztikus és sztochasztikus meghatározásának módját.

a) ortogonális koordinátatengelyek irányába történő mérés esetén –amikor is a 3 fúróluk páronként egymásra merőleges és

b) általános irányú fúrólukak esetén.

Az a) esetben az  $E$  és  $m$  kőzetállandók mellett a primér feszültségeket a fúrólukak tengelye által meghatározott derékszögű koordinátákban állíthatjuk elő:

$$\mathbf{F}_p = \begin{vmatrix} p_x & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & p_y & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & p_z \end{vmatrix} = \mathbf{F}_p < x, y, z >$$

A b) esetben a feszültségeket a  $\xi, \eta, \zeta$  általános nem ortogonális koordinátairányokban kapjuk meg. Egy egyszerű koordinátatranszformációval azonban ezek is átvihetők valamilyen általunk választott  $x, y, z$  derékszögű rendszerbe. Az új koordinátarendszer tengelyirányait jelöljük  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$  egységvektorokkal, melyek adottak, mivel a fúrólukak tengelyirányainak térbeli elhelyezkedését ismerjük. S ekkor a választott koordinátairányokban a feszültségtenzor a következő lesz:



$$\mathbf{F}_p = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\xi \mathbf{F} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\xi \mathbf{F} \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\xi \mathbf{F} \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{e}_\eta \mathbf{F} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta \mathbf{F} \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\eta \mathbf{F} \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{e}_\zeta \mathbf{F} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\zeta \mathbf{F} \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\zeta \mathbf{F} \mathbf{e}_\zeta \end{vmatrix} = \mathbf{F} < \xi, \eta, \zeta >,$$

Következésképp a b) esetben is az (1) alakúra transzformáljuk a feszültségtenzor mátrixát.

Ebben az esetben viszont már a feladat azt az 1, 2 és 3 koordinátairányokat meghatározni, amelyben a feszültségtenzor az

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix} = \mathbf{F}_p < 1, 2, 3 > ,$$

alakúra transzformálódik. Így a primér főfeszültségek és főirányok megállapítása a következő lesz:

Meghatározzuk az

$$\mathbf{F}_p - p\mathbf{I} = 0$$

egyenlet

$$p_1 \geq p_2 \geq p_3 ,$$

gyökeket, majd ennek ismeretében az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  főirányokat az

$$(\mathbf{F}_p - p_1 \mathbf{I}) \mathbf{e}_1 = 0 \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = 1$$

$$(\mathbf{F}_p - p_2 \mathbf{I}) \mathbf{e}_2 = 0 \quad \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = 1$$

$$(\mathbf{F}_p - p_3 \mathbf{I}) \mathbf{e}_3 = 0 \quad \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = 1$$

egyenletből.

Mivel látjuk, hogy a térbeli állapot meghatározása három egymástól különböző síkbeli állapot alapján történik, a következőkben egyetlen fúróluk esetére vonatkoztatjuk vizsgálatainkat.

### 8.3 Előzetes megjegyzések

A fúróluk tengelyére merőleges síkban — a következőkben  $x, z$

síknak jelöljük — a primér állapotot ismertnek tételezzük fel, ha ismeretes a  $p$  és  $q$  egymásra merőleges főfeszültségek nagyságai és irányai (ez utóbbit jellemezzük a  $p$  főfeszültségnek az  $x$  iránnyal bezárt  $\psi$  szögével), továbbá a közet  $E$  rugalmassági modulusa és  $m$  Poisson-száma.

A két főfeszültség arányát — megállapodásként —  $k$ -val, az ún. kvázi Poisson számmal fejezhetjük ki:

$$\frac{p}{q} = k - 1,$$

tehát a következőkben a

$$p[\text{kp/cm}^2], \quad k, \quad \psi[\text{fok}], \quad E[\text{kp/cm}^2] \quad \text{és} \quad m$$

értékének in-situ mérésekkel történő meghatározásával foglalkozunk.

Az egyes kerületi pontok fajlagos alakváltozását és sugárirányú elmozdulását mérve, a szekunder állapothoz tartozó kerületi deformációt kapjuk ellenkező előjellel, s ezekből a mérési eredményekből határozhatók meg a primér mező paraméter-értékei az

$$[\varepsilon_\varphi]_R \equiv \varepsilon_\varphi = f_1(p, k, \psi, E, m)$$

$$[u]_R \equiv u = f_2(p, k, \psi, E, m)$$

függvények segítségével.

Továbbiakban fejtegetéseinket ezekre a mérési eredményekre alapozzuk, s vizsgálataink a bányabeli helyzetet reprezentáló sík-alakváltozási állapotra vonatkoznak.

#### 8.4 A paraméterek egyszerű meghatározása

Legelső bányabeli méréseinknél a vízszintes tengelyű fúrólyuk kerületét elektromos nyúlásmérő bélyegekkel körberagasztottuk, s a felületi blokkok szabaddá tétele után kapott értékek alapján rajzoltuk fel az

$$\varepsilon_\varphi = F_1(\varphi)$$

függvényt (99. ábra), s innen határoztuk meg az  $\varepsilon_\varphi^{\max}$ , illetve  $\varepsilon_\varphi^{\min}$  maximális, illetve minimális tangenciális nyúlások értékét, valamint az első főiránynak a függőlegessel bezárt  $\psi$  szögét.

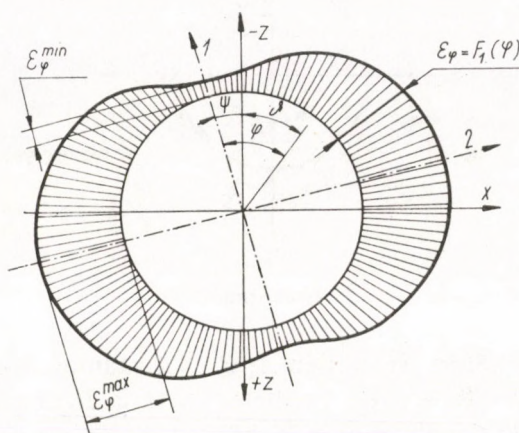


Dr. Richter R. professzor a [22] alatti tanulmányában bemutatta, hogy ismeretlen főfeszültségi irány esetén három érintőirányú nyúlás-mérés elegendő a  $\psi$  irány és a kerületen jelentkező maximális és minimális tangenciális fajlagos alakváltozások meghatározására.

Az  $\epsilon_\varphi$  értéke a kerületi pontokban [20]:

$$\epsilon_\varphi = p \frac{m^2 - 1}{Em^2} \frac{1}{k - 1} [k - 2(k - 2) \cos 2\varphi] \quad (1)$$

formában állítható elő, ahol a  $\varphi$  szöget az első főiránytól az óramutató járásával egyező irányban értelmezzük (99. ábra).



99. ábra.

A (2) alatti összefüggés az

$$\begin{aligned} A &\equiv p \frac{m^2 - 1}{Em^2} \frac{k}{k - 1} \\ B &\equiv -p \frac{m^2 - 1}{Em^2} \frac{2(k - 2)}{k - 1} \end{aligned} \quad (2)$$

jelölések segítségével

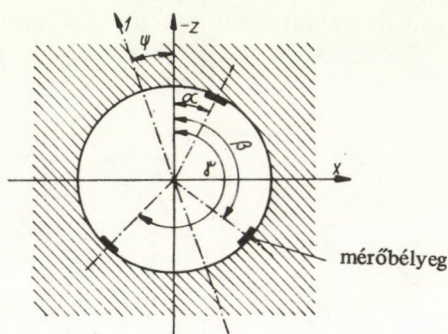
$$\epsilon_\varphi = A + B \cos 2\varphi, \quad [\epsilon_\varphi = F_1(\varphi)]. \quad (3)$$

alakra hozható.

Ennek alapján a mérési eredmények kifejezhetők

$$\left. \begin{aligned} [\varepsilon_\varphi]_{\vartheta=\alpha} &= \varepsilon_{\varphi\alpha} = A + B \cos 2(\psi + \alpha) \\ [\varepsilon_\varphi]_{\vartheta=\beta} &= \varepsilon_{\varphi\beta} = A + B \cos 2(\psi + \beta) \\ [\varepsilon_\varphi]_{\vartheta=\gamma} &= \varepsilon_{\varphi\gamma} = A + B \cos 2(\psi + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

formában, ahol  $\varepsilon_{\varphi\alpha, \beta, \gamma}$  a kerületen mért fajlagos hosszváltozások ellenkező előjellel, s az egyes szögek értelmezését a 100. ábrán láthatjuk. A (4)



100. ábra.

egyenletrendszerből az ismeretlen  $A$ ,  $B$  és  $\psi$  számítható, ugyanis az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , valamint  $\varepsilon_{\varphi\alpha}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\beta}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\gamma}$  mérhető. Az  $A$  és  $B$  ismeretében viszont a maximális és minimális nyúlásértékek meghatározhatók:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi^{\max} &= A - B, \\ \varepsilon_\varphi^{\min} &= A + B. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Az  $A$ ,  $B$  és  $\psi$  meghatározásához a (4) egyenletrendszert felírjuk mégegyszer, de most már részletezve:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\alpha} &= A + B [\cos 2\psi \cos 2\alpha - \sin 2\psi \sin 2\alpha] \\ \varepsilon_{\varphi\beta} &= A + B [\cos 2\psi \cos 2\beta - \sin 2\psi \sin 2\beta] \\ \varepsilon_{\varphi\gamma} &= A + B [\cos 2\psi \cos 2\gamma - \sin 2\psi \sin 2\gamma] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

A (6) első egyenletéből kifejezve az  $A$ -t, s behelyettesítve a másodikba,  $B$ -re kapjuk, hogy

$$B = \frac{\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta}}{\cos 2\psi (\cos 2\alpha - \cos 2\beta) - \sin 2\psi (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)}$$



s  $B$ -t visszahelyettesítve az első egyenletbe az  $A$ -ra a következő kifejezés adódik:

$$A = \varepsilon_{\varphi\alpha} - \frac{(\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta})(\cos 2\psi \cos 2\alpha - \sin 2\psi \sin 2\alpha)}{\cos 2\psi(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) - \sin 2\psi(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)}.$$

Az  $A$ -t és  $B$ -t a (6) alatti rendszer harmadik egyenletébe helyettesítve és rendezve,  $\psi$ -re az

$$(\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\gamma})[\cos 2\psi(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) - \sin 2\psi(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)] - (\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta})[\cos 2\psi(\cos 2\alpha - \cos 2\gamma) - \sin 2\psi(\sin 2\alpha - \sin 2\gamma)] = 0. \quad (7)$$

egyenletet kapjuk.

Bevezetve a

$$\left. \begin{aligned} C &\equiv (\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\gamma})(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) - (\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta})(\cos 2\alpha - \cos 2\gamma) \\ D &\equiv (\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta})(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) - (\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\gamma})(\sin 2\alpha - \sin 2\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

jelöléseket, a (7) egyenlet

$$C \cos 2\psi - D \sin 2\psi = 0,$$

alakra hozható, s a  $2\psi$ -t a

$$2\psi = \arctg \frac{C}{D} \quad (9)$$

egyenletből számítjuk.

Mivel

$$\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2(\psi + k\pi), \quad \text{ahol} \quad k = 1, 2, \dots$$

a (9) egyenletből két  $\psi$  szöget kapunk, amelyek egymástól  $90^\circ$ -kal térnek el. Ezek közül az határozza meg az első főfeszültségi irányt, amelynek egyenese közelebb hajlik a  $z$  tengelyhez. (Kieértékelésnél mindig szem előtt tartandó, hogy a  $\psi$  szöget a többi szögtől ellentétben, az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük fel a pozitív  $z$  tengelytől.)

A  $\psi$  szög ismeretében az  $A$  és  $B$  számítható:

$$A = \varepsilon_{\varphi\alpha} - \frac{\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta}}{1 - \frac{\cos 2(\psi + \beta)}{\cos 2(\psi + \alpha)}}, \quad (10)$$

$$B = \frac{\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta}}{\cos 2(\psi + \alpha) - \cos 2(\psi + \beta)}, \quad (11)$$

s az (5) egyenlet alapján az extrémális érintőirányú főnyúlások:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi}^{\max} &= \varepsilon_{\varphi\alpha} - \frac{(\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta})[\cos 2(\psi + \alpha) + 1]}{\cos 2(\psi + \alpha) - \cos 2(\psi + \beta)}, \\ \varepsilon_{\varphi}^{\min} &= \varepsilon_{\varphi\alpha} - \frac{(\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta})[\cos 2(\psi + \alpha) - 1]}{\cos 2(\psi + \alpha) - \cos 2(\psi + \beta)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Az (5) két egyenletének hányadosát képezve, s felhasználva a (3) alatti egyenleteket, kapjuk, hogy

$$\frac{\varepsilon_{\varphi}^{\max}}{\varepsilon_{\varphi}^{\min}} = \frac{A - B}{A + B} = \frac{3k - 4}{4 - k}, \quad (13)$$

s a kvázi *Poisson*-féle számra a következő képlet adódik:

$$k = 4 \frac{\varepsilon_{\varphi}^{\max} + \varepsilon_{\varphi}^{\min}}{\varepsilon_{\varphi}^{\max} + 3\varepsilon_{\varphi}^{\min}} \quad (14)$$

illetve a (12) alapján:

$$k = 8 \frac{\varepsilon_{\varphi\beta} \cos 2(\psi + \alpha) - \varepsilon_{\varphi\alpha} \cos 2(\psi + \beta)}{4[\varepsilon_{\varphi\beta} \cos 2(\psi + \alpha) - \varepsilon_{\varphi\alpha} \cos 2(\psi + \beta)] + 3(\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta})}. \quad (15)$$

Mivel az  $A$  és  $B$  értékét célszerű kiszámítani, a  $k$  in-situ értékének a meghatározását egyszerűen a

$$k = 4 \frac{A}{B + 2A} \quad (16)$$

képlettel végezhetjük.

In-situ méréseinknél az  $\varepsilon_{\varphi}$  mellett a kerület egyes pontjainak  $u \equiv [u]_R$  radiális irányú elmozdulását is mértük. Az üreg felületi pontjainak radiális elmozdulását az

$$u = -pR \frac{m+1}{2mE} \frac{1}{k-1} \left[ k - (k-2) \left( 4 \frac{m-1}{m} - 1 \right) \cos 2\varphi \right], \quad (17)$$



kifejezés reprezentálja [21], ahol  $R$  a fúróluk sugarát jelenti. Az előzők analógiájára

$$u = \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \cos 2\varphi, \quad (18)$$

$$\text{írható, ahol } \left. \begin{aligned} \tilde{A}^* &\equiv -pR \frac{m+1}{2mE} \frac{k}{k-1} \\ \tilde{B}^* &\equiv pR \frac{m+1}{2mE} \frac{k-2}{k-1} \left( 4 \frac{m-1}{m} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Mivel a  $\psi$  irányszög az előző mérésből ismert, az  $A^*$  és  $B^*$  meghatározására két elmozdulásmérést kell végeznünk.

Ezek a mérési eredmények

$$\left. \begin{aligned} [u]_{\varphi=\kappa} &\equiv u_{\kappa} = \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \cos 2(\psi + \kappa) \\ [u]_{\varphi=\lambda} &\equiv u_{\lambda} = \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \cos 2(\psi + \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

alakban írhatók fel, ahol  $\kappa$  és  $\lambda$  a radiális elmozdulást mérő észlelőtestek elhelyezési szöge,  $u_{\kappa}$  és  $u_{\lambda}$  pedig ezekben a pontokban a mért sugárirányú elmozdulás ellenkező előjellel véve.

A (20) alatti egyenletekből

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}^* &= \frac{u_{\kappa} \cos 2(\psi + \lambda) - u_{\lambda} \cos 2(\psi + \kappa)}{\cos 2(\psi + \lambda) - \cos 2(\psi + \kappa)}, \\ \tilde{B}^* &= \frac{u_{\lambda} - u_{\kappa}}{\cos 2(\psi + \lambda) - \cos 2(\psi + \kappa)}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

A maximális, illetve minimális radiális elmozdulás:

$$\left. \begin{aligned} u^{\max} &= \tilde{A}^* + \tilde{B}^*, \\ u^{\min} &= \tilde{A}^* - \tilde{B}^*, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

illetve

$$\left. \begin{aligned} u^{\max} &= \frac{u_{\kappa} [\cos 2(\psi + \lambda) - 1] - u_{\lambda} [\cos 2(\psi + \kappa) - 1]}{\cos 2(\psi + \lambda) - \cos 2(\psi + \kappa)} \\ u^{\min} &= \frac{u_{\kappa} [\cos 2(\psi + \lambda) + 1] - u_{\lambda} [\cos 2(\psi + \kappa) + 1]}{\cos 2(\psi + \lambda) - \cos 2(\psi + \kappa)}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

A (3) és (19) alatti összefüggések alapján az  $m$ ,  $k$ ,  $p$  és  $E$  meghatározásához négy egyenletünk van:

$$\begin{array}{ll}
 (a) & A = p \frac{m^2 - 1}{Em^2} \frac{k}{k-1} \\
 (b) & B = -p \frac{m^2 - 1}{Em^2} \frac{2}{k-1} (k-2) \\
 (c) & \tilde{A}^* = -pR \frac{m+1}{2mE} \frac{k}{k-1} \\
 (d) & \tilde{B}^* = pR \frac{m+1}{2mE} \frac{k-2}{k-1} \left( 4 \frac{m-1}{m} - 1 \right)
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array}} \right\} \quad (24)$$

amelyekből

$$k = \frac{4A}{2A+B} \quad (16)$$

és

$$m = \frac{2\tilde{A}^*}{AR + 2\tilde{A}^*} \quad (25)$$

a fenti egyszerű képletekkel számítható.

Mivel a (24) alatti egyenletek közül csak három tekinthető lineárisan függetlennek, így az  $E$  és  $p$  meghatározására még egy mérést kell végezni. Közismert, hogy az  $E$  rugalmassági modulus az adott közeta-nyagra vonatkozóan laboratóriumban is meghatározható, a  $p$  értéke pe- dig közelítőleg a  $\gamma\gamma$  statisztikus átlaggal helyettesíthető. Bármely para- méter ( $E$  vagy  $p$ ) ismeretében, a másik már a (24) alapján kiszámítha- tó.

Azonban a feszültségi és alakváltozási mező primér paraméter-ér- tékeinek meghatározását célszerű teljes egészében in-situ mérések alap- ján végezni.

A hiányzó közetkarakterisztikus jellemző meghatározására célsze- rű *Dr. Richter* belső gáznyomásos mérését felhasználni [20]. Ennél a kísérletnél a körszelvényű furatra  $q_0$  intenzitású egyenletesen megosz- ló gáznyomás hat, s a kerületi pontok  $\epsilon_{\varphi_0}$  fajlagos hosszváltozást szen- vednek, amely elektromos nyúlásmérő bélyegekkal mérhető. Mivel az

$$[\epsilon_{\varphi_0}]_R \equiv \epsilon_{\varphi_0} = -\frac{q_0}{E} \cdot \frac{m+1}{m}, \quad (26)$$

az  $E$  Young-féle modulus értéke a  $q_0$  gáznyomás, a fent számított *Pois- son* szám és a mért  $\epsilon_{\varphi_0}$  ismeretében már meghatározható:



$$E = -\frac{q_0}{\varepsilon_{\varphi_0}} \frac{m+1}{m}, \quad (27)$$

(Általában a kerületen célszerű – az anyag szabálytalansága miatt – több mérőbélyeget elhelyezni, s ekkor a mérések átlagát vesszük  $\varepsilon_{\varphi_0}$ -nak.)

Az  $E$  ismeretében a  $p$  főfeszültség a (24c) vagy (24d) egyenletből már meghatározható.

Mivel a primér paraméterek meghatározására eggyel több (6) in-situ mérést végeztünk, a  $p$  értékére különböző értékeket kaphatunk aszerint, hogy a (24) egyenletrendszer mely egyenleteit használtuk fel. Az  $m$  és  $k$  meghatározásához az első három egyenletet vettük, így azok azonos  $p$  értéket szolgáltatnak, míg a negyedik egyenletből számított  $p$  ettől eltérhet:

$$p = A \frac{Em^2}{m^2-1} \cdot \frac{k-1}{k} = -B \frac{Em^2}{m^2-1} \cdot \frac{k-1}{2(k-2)} = -\tilde{A}^* \frac{1}{R} \frac{2mE}{m+1} \cdot \frac{k-1}{k},$$

$$p = \tilde{B}^* \frac{1}{R} \cdot \frac{2mE}{m+1} \cdot \frac{k-1}{k+2} \cdot \frac{m}{3m-4}.$$

Ilyen esetben, amikor egy fölös mérésünk van, a  $p$ -t a két érték átlagának vehetjük, ha ezek eltérése nem nagyobb, mint  $\sim 5$  kp/cm<sup>2</sup>. Nagyobb eltérés esetén a mérés megismétlendő.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a feszültség és mozgásmező primér jellemzőinek meghatározására elegendő egyetlen radiális irányú elmozdulásmérést végezni:

$$u_{\kappa} = -pR \frac{m+1}{2mE} \cdot \frac{1}{k-1} \left[ k - (k-2) \frac{3m-4}{m} \cos 2\varphi_{\kappa}^* \right]$$

ahol  $\varphi_{\kappa}^* = \psi + \kappa$ . A (24a) egyenletből kifejezve a  $p$ -t:

$$p = A \frac{m^2}{m^2-1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot E \quad (28)$$

s  $u_{\kappa}$  fenti egyenletébe behelyettesítve kapjuk:

$$u_{\kappa} = -\frac{1}{2} AR \frac{m}{m-1} \cdot \frac{1}{k} \left[ k - (k-2) \frac{3m-4}{m} \cos 2\varphi_{\kappa}^* \right]$$

Innen a *Poisson*-féle szám:

$$m = \frac{2u_x - 4AR \frac{k-2}{k} \cos 2\varphi_x^*}{2u_x - AR \left( 1 - 3 \frac{k-2}{k} \cos 2\varphi_x^* \right)} \quad (29)$$

Összefoglalva: Három darab fajlagos tangenciális nyúlásmérésből meghatározhatjuk a primér főirányokat:

$$2\psi = \arctg \frac{(\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\gamma})(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) - (\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\lambda})(\cos 2\alpha - \cos 2\gamma)}{(\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta})(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) - (\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\gamma})(\sin 2\alpha - \sin 2\gamma)}, \quad (I)$$

és az  $A$ ,  $B$  állandók értékét:

$$A = \varepsilon_{\varphi\alpha} - \frac{\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta}}{1 - \frac{\cos 2(\psi + \beta)}{\cos 2(\psi + \alpha)}}, \quad B = \frac{\varepsilon_{\varphi\alpha} - \varepsilon_{\varphi\beta}}{\cos 2(\psi + \alpha) - \cos 2(\psi + \beta)},$$

valamint a kvázi *Poisson* számot:

$$k = 4 \frac{A}{B + 2A} \quad (II)$$

A radiálisirányú elmozdulásmérésből a *Poisson* szám in-situ értéke:

$$m = \frac{2u_x - 4AR \frac{k-2}{k} \cos 2(\psi + \kappa)}{2u_x - AR \left[ 1 - 3 \frac{k-2}{k} \cos 2(\psi + \kappa) \right]} \quad (III)$$

formában számítható. A belső gáznyomásos kísérletből az  $m$  ismeretében az  $E$  már meghatározható:

$$E = - \frac{q_0}{\varepsilon_{\varphi_0}} \cdot \frac{m+1}{m}, \quad (IV)$$

s így a  $p$  primér főfeszültség értéke:

$$p = AE \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{k-1}{k}. \quad (V)$$



### 8.5 A paraméterek statisztikus meghatározása

Az elmondottakból látható, hogy a primér mező  $\psi$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $E$  és  $p$  karakterisztikus jellemzőinek meghatározásához legalább öt darab in-situ mérés szükséges. Ez a belső gáznyomásos tangenciális nyúlásmérésen kívül lehet mint fent, három fajlagos nyúlásmérés és egy sugárirányú elmozdulásmérés. Ha a radiális elmozdulásmérés esetleg egyszerűbben kivitelezhető, mint az  $\epsilon_\varphi$  mérése, akkor a fenti paramétereket egy nyúlás és három elmozdulásmérésből is meghatározhatjuk. Ugyanis az  $u$  és az  $\epsilon_\varphi$  egyaránt két részre bontható, egy  $\varphi$ -től független és egy  $\varphi$ -től a  $\cos 2\varphi$  függvény szerint függő részre, tehát a  $\psi$  meghatározása bármelyik mérésből történhet.

Ha a szükséges méréseken kívül fölös mérések is történnek, akkor meg van a lehetősége, hogy a paramétereket kiegyenlítés útján határozzuk meg. Ekkor a determinisztikus kiértékelés helyett az adatokat sztochasztikus jelleggel értékelhetjük ki, s ezáltal megnő annak a lehetősége, hogy méréseink a bányabeli állapotokat nagyobb valószínűséggel reprezentálják.

Méréseinkben az anyag szabálytalansága miatt jelentkező eltéréseket tekintsük normális (Gauss) eloszlásúnak, s ekkor a primér paraméterek meghatározására az alábbi statisztikus kiértékelés látszik a legcélszerűbbnek.

Jelöljük a nyúlásmérőbéllyegek elhelyezési szögét – a függőleges tengelytől az óramutató járásával egyező irányban mérve  $\vartheta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )-nel, a radiális elmozdulások mérésére szolgáló mérőtestek elhelyezési szögét  $\vartheta_j^*$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )-mel.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a primér feszültségi és alakváltozási mező jellemzőinek meghatározása az

$$A, B, \tilde{A}^*, \tilde{B}^* \psi.$$

konkrét értékeinek a megállapításával történhet. Ekkor a fenti állandók kiszámításához  $n + m$  számú egyenletünk van:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\varphi i} &= A + B \cos 2(\psi + \vartheta_i) & (i = 1, 2, \dots, n) \\ u_j &= \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \cos 2(\psi + \vartheta_j^*) & (j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\}$$

tehát a megoldás csak kiegyenlítés útján lehetséges.

Bevezetünk  $n + m$  számú segédváltozót

$$\left. \begin{aligned} U_i &= A + B \cos 2(\psi + \vartheta_i) - \varepsilon_{\varphi i} & (i = 1, 2, \dots, n) \\ U_j &= A^* + B^* \cos 2(\psi + \vartheta_j^*) - \hat{u}_j & (j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\}$$

ahol

$$A^* = \frac{A^*}{R},$$

$$B^* = \frac{B^*}{R},$$

$$\hat{u}_j = \frac{u_j}{R},$$

s a konstansok meghatározását a *Gauss*-elv alapján az

$$S = S(A, B, A^*, B^*, \psi) \equiv \sum_{i=1}^n U_i^2 + \sum_{j=1}^m U_j^2 = \text{Min} \quad (30)$$

feltételből végezhetjük.

A (30) függvény kiírva a következő:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n [A + B \cos 2(\psi + \vartheta_i) - \varepsilon_{\varphi i}]^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^m [A^* + B^* \cos 2(\psi + \vartheta_j^*) - \hat{u}_j]^2, \end{aligned} \quad (30a)$$

s a minimum szükséges feltételül az alábbi egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial A} &\equiv \sum_{i=1}^n [A + B \cos 2(\psi + \vartheta_i) - \varepsilon_{\varphi i}] &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial B} &\equiv \sum_{i=1}^n [A + B \cos 2(\psi + \vartheta_i) - \varepsilon_{\varphi i}] \cos 2(\psi + \vartheta_i) &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial A^*} &\equiv \sum_{j=1}^m [A^* + B^* \cos 2(\psi + \vartheta_j^*) - \hat{u}_j] &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial B^*} &\equiv \sum_{j=1}^m [A^* + B^* \cos 2(\psi + \vartheta_j^*) - \hat{u}_j] \cos 2(\psi + \vartheta_j^*) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$



$$-\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \psi} \equiv \sum_{i=1}^n [A + B \cos 2(\psi + \vartheta_i) - \varepsilon_{\varphi i}] 2B \sin 2(\psi + \vartheta_i) + \\ + \sum_{j=1}^m [A^* + B^* \cos 2(\psi + \vartheta_j^*) - \hat{u}_j] 2B \sin 2(\psi + \vartheta_j^*) = 0$$

A (31) egyenletrendszerből a keresett állandók meghatározása eléggé nehézkes, ui. az állandókon kívül, azok négyzetei, vegyes szorzatai is megtalálhatók, ezért a következő fokozatos közelítő módszert javasoljuk.

Tételezzük fel, hogy az  $A$ ,  $B$ ,  $A^*$ ,  $B^*$  és  $\psi$  értékére rendelkezésünk re áll egy jó közelítő érték, amelyeket jelöljünk

$$A_0, B_0, A_0^*, B_0^*, \psi_0 \quad (32)$$

szimbolumokkal. (A (32) értékeket a mért  $n + m$  adat, tetszőleges öt  $(3 + 2)$  fajlagos nyúlás és elmozdulás értéke alapján is számíthatjuk, a már ismertetett képletek alapján.)

A (28) egyenleteket fejtsük *Taylor* sorba a 0 indexszel jelzett helyen és az elsőfokúnál magasabb fokú tagokat elhanyagolva kapjuk:

$$\varepsilon_{\varphi i} \approx \bar{\varepsilon}_{\varphi i} = \varepsilon_{\varphi i}(A_0, B_0, \psi_0) + \frac{\partial}{\partial A} \varepsilon_{\varphi i}(A_0, B_0, \psi_0) (A - A_0) + \\ + \frac{\partial}{\partial B} \varepsilon_{\varphi i}(A_0, B_0, \psi_0) (B - B_0) + \\ + \frac{\partial}{\partial \psi} \varepsilon_{\varphi i}(A_0, B_0, \psi_0) (\psi - \psi_0), \quad (33)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\hat{u}_j \approx \bar{u}_j = u_j(A_0^*, B_0^*, \psi_0) + \frac{\partial}{\partial A^*} u_j(A_0^*, B_0^*, \psi_0) (A^* - A_0^*) + \\ + \frac{\partial}{\partial B^*} u_j(A_0^*, B_0^*, \psi_0) (B^* - B_0^*) + \\ + \frac{\partial}{\partial \psi} u_j(A_0^*, B_0^*, \psi_0) (\psi - \psi_0), \quad (34)$$

( $j = 1, 2, \dots, m$ )

ahol  $\varepsilon_{\varphi i}(A_0, B_0, \psi_0)$ -val, illetve  $u_j(A_0^*, B_0^*, \psi_0)$ -val az  $\varepsilon_{\varphi i}$  illetve  $u_j$  értékeket értjük az  $A_0, B_0, A_0^*, B_0^*, \psi_0$  helyen, azaz

$$\varepsilon_{\varphi i}(A, B, \psi) \Big|_{\substack{A=A_0 \\ B=B_0 \\ \psi=\psi_0}} = \varepsilon_{\varphi i}(A_0, B_0, \psi_0),$$

$$u_j(A^*, B^*, \psi) \Big|_{\substack{A^*=A_0^* \\ B^*=B_0^* \\ \psi=\psi_0}} = u_j(A_0^*, B_0^*, \psi_0).$$

Az

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \Delta A \\ B &= B_0 + \Delta B \\ A^* &= A_0^* + \Delta A^* \\ B^* &= B_0^* + \Delta B^* \\ \psi &= \psi_0 + \Delta \psi \end{aligned} \quad (35)$$

jelölésekkel a (33), (34) egyenleteket kiírva:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{\varphi i} &= A_0 + B_0 \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) + \Delta A + \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) \Delta B - \\ &\quad - 2B_0 \sin 2(\psi_0 + \vartheta_i) \Delta \psi \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_j &= A_0^* + B_0^* \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) + \Delta A^* + \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \Delta B^* - \\ &\quad - 2B_0^* \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \Delta \psi \quad (j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (37)$$

A  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta A^*$ ,  $\Delta B^*$  és  $\Delta \psi$  értékét ismert módon a legkisebb négyzetek elve alapján határozzuk meg, az

$$S = S(\Delta A, \Delta B, \Delta A^*, \Delta B^*, \Delta \psi) \equiv \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{\varphi i} - \bar{\varepsilon}_{\varphi i}]^2 + \sum_{j=1}^m [\hat{u}_j - \bar{u}_j]^2 = \text{Min.} \quad (38)$$

feltételből. A minimum szükséges feltételül az alábbi egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \Delta A} &\equiv \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{\varphi i} - A_0 - B_0 \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) - \Delta A - \\ &\quad - \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) \Delta B + 2B_0 \sin 2(\psi_0 + \\ &\quad + \vartheta_i) \Delta \psi] = 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \Delta B} &\equiv \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{\varphi i} - A_0 - B_0 \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) - \Delta A - \\ &\quad - \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) \Delta B + 2B_0 \sin 2(\psi_0 + \\ &\quad + \vartheta_i) \Delta \psi] \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) = 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \Delta A^*} &\equiv \sum_{j=1}^m [\hat{u}_j - A_0^* - B_0^* \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) - \Delta A^* - \\ &\quad - \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \Delta B + 2B_0^* \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \Delta \psi] = 0 \end{aligned} \quad (39)$$



$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \Delta B^*} &\equiv \sum_{j=1}^m [\hat{u}_j - A_0^* - B_0^* \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) - \Delta A^* - \\
&\quad - \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \Delta B^* + 2B_0^* \sin 2(\psi_0 + \\
&\quad + \vartheta_j^*) \Delta \psi] \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) = 0 \\
\frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial \Delta \psi} &\equiv \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{\varphi i} - A_0 - B_0 \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) - \Delta A - \\
&\quad - \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) \Delta B + 2B_0 \sin 2(\psi_0 + \\
&\quad + \vartheta_i) \Delta \psi] B_0 \sin 2(\psi_0 + \vartheta_i) + \sum_{j=1}^m [\hat{u}_j - A_0^* - \\
&\quad - B_0^* \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) - \Delta A^* - \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \Delta B^* + \\
&\quad + 2B_0^* \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \Delta \psi] B_0^* \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) = 0
\end{aligned} \tag{39}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
b_1 &\equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} - n A_0 - B_0 \sum_{i=1}^m \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) \\
a_1 &\equiv \sum_{i=1}^n \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) \\
a_2 &\equiv \sum_{i=1}^n \sin 2(\psi_0 + \vartheta_i) \cdot 2 B_0 \\
b_2 &\equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) - A_0 \sum_{i=1}^n \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) - B_0 \sum_{i=1}^n \cos^2 2(\psi_0 + \vartheta_i) \\
a_3 &\equiv \sum_{i=1}^n \cos^2 2(\psi_0 + \vartheta_i) \\
a_4 &\equiv \sum_{i=1}^n \sin 2(\psi_0 + \vartheta_i) \cdot \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) \cdot 2 B_0 \\
b_3 &\equiv \sum_{j=1}^m \hat{u}_j - A_0^* - B_0^* \sum_{j=1}^m \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \\
a_5 &\equiv \sum_{j=1}^m \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \\
a_6 &\equiv \sum_{j=1}^m \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \cdot 2 B_0^* \\
b_4 &\equiv \sum_{j=1}^m u_j \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) - A_0^* \sum_{j=1}^m \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) - B_0^* \sum_{j=1}^m \cos^2 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \\
a_7 &\equiv \sum_{j=1}^m \cos^2 2(\psi_0 + \vartheta_j^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_8 &\equiv \sum_{j=1}^m \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \cdot 2B_0^* \\
 b_5 &\equiv \sum_{j=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \cdot \sin 2(\psi_0 + \vartheta_i) \cdot B_0 - A_0 B_0 \sum_{i=1}^n \sin 2(\psi_0 + \vartheta_i) - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \sin 2(\psi_0 + \vartheta_i) \cdot \cos 2(\psi_0 + \vartheta_i) B_0^2 + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \hat{u}_j \cdot \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \cdot B_0^* - \sum_{i=1}^m \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) A_0^* B_0^* - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^m \sin 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \cdot \cos 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \cdot B_0^{*2} \\
 a_9 &\equiv \sum_{i=1}^n \sin^2 2(\psi_0 + \vartheta_i) \cdot 2B_0^2 + \sum_{j=1}^m \sin^2 2(\psi_0 + \vartheta_j^*) \cdot 2B_0^{*2}
 \end{aligned}$$

s ekkor írható:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta A + a_1 \Delta B & & -a_2 \Delta \psi = b_1 \\
 a_1 \Delta A + a_3 \Delta B & & -a_4 \Delta \psi = b_2 \\
 \Delta A^* + a_5 \Delta B^* - a_6 \Delta \psi & = b_3 \\
 a_5 \Delta A^* + a_7 \Delta B^* - a_8 \Delta \psi & = b_4 \\
 \frac{1}{2} a_2 \Delta A + \frac{1}{2} a_4 \Delta B + \frac{1}{2} a_6 \Delta A^* + \frac{1}{2} a_8 \Delta B^* - a_9 \Delta \psi & = b_5
 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

A (40) alatti lineáris egyenletrendszerből a  $\Delta$ -val jelzett értékek már egyszerűen meghatározhatók.

A fenti szukcesszív approximációs módszer két-három lépés után már elegendő pontosságú eredményt szolgáltat. Az  $A$ ,  $B$ ,  $A^*$ ,  $B^*$  és  $\psi$  értékek, valamint a belső gáznyomásos mérés  $\varepsilon_{\varphi 0}$ ,  $q_0$  értékei alapján a jellemző paraméterek a 8.4 pontban közölt módon meghatározhatók.

Sok esetben a primér főfeszültségi és alakváltozási irányok már ismertek – az adott telepre vonatkozó előző bányabeli mérések alapján. Ekkor egy következő sorozat méréseinek a kiértékelése jóval egyszerűbb lesz, ui. az  $A$ ,  $B$ ,  $A^*$ ,  $B^*$  konstansok meghatározását az

$$\begin{aligned}
 S_0 = S_0(A, B, A^*, B^*) &\equiv \sum_{i=1}^m [A + B \cos 2\varphi_i - \varepsilon_{\varphi i}]^2 + \\
 &+ \sum_{j=1}^m [A^* + B^* \cos 2\varphi_j^* - \hat{u}_j]^2 = \text{Min}, \quad (41)
 \end{aligned}$$



feltételből végezhetjük, ahol  $\varphi_i$ , illetve  $\varphi_j^*$  a nyúlásmérőbélyegek, illetve elmozdulást mérő berendezéseknek az első főiránytól vett elhelyezési szöge.

Az  $S_0$  függvény parciális differenciálhányadosait képezve és zérussal egyenlővé téve, az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S_0}{\partial A} &\equiv \sum_{i=1}^n [A + B \cos 2\varphi_i - \varepsilon_{\varphi i}] &= 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial S_0}{\partial B} &\equiv \sum_{i=1}^n [A + B \cos 2\varphi_i - \varepsilon_{\varphi i}] \cos 2\varphi_i &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_0}{\partial A^*} &\equiv \sum_{j=1}^m [A^* + B^* \cos 2\varphi_j^* - \hat{u}_j] &= 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial S_0}{\partial B^*} &\equiv \sum_{j=1}^m [A^* + B^* \cos 2\varphi_j^* - \hat{u}_j] \cos 2\varphi_j^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ahonnan

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{n \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \cos 2\varphi_i - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \sum_{i=1}^n \cos 2\varphi_i}{n \sum_{i=1}^n \cos 2\varphi_i \cos 2\varphi_i - \sum_{i=1}^n \cos 2\varphi_i \sum_{i=1}^n \cos 2\varphi_i} \\ B^* &= \frac{m \sum_{j=1}^m \hat{u}_j \cos 2\varphi_j^* - \sum_{j=1}^m \hat{u}_j \sum_{j=1}^m \cos 2\varphi_j^*}{m \sum_{j=1}^m \cos 2\varphi_j^* \cos 2\varphi_j^* - \sum_{j=1}^m \cos 2\varphi_j^* \sum_{j=1}^m \cos 2\varphi_j^*} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

s a  $B$ ,  $B^*$  értékének ismeretében az  $A$  és  $A^*$  már számítható:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} - B \sum_{i=1}^n \cos 2\varphi_i}{n} \\ A^* &= \frac{\sum_{j=1}^m \hat{u}_j - B^* \sum_{j=1}^m \cos 2\varphi_j^*}{m} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

### 8.6 Numerikus példák

1. Először a paraméterek egyenes meghatározására nézzünk egy példát. A mérési adatokat a 6. táblázat tartalmazza.

6. táblázat	
$\vartheta$	$\varepsilon_{\varphi}$
$\alpha = 20^\circ$	$-0,697 \cdot 10^{-3}$
$\beta = 95^\circ$	$6,339 \cdot 10^{-3}$
$\gamma = 225^\circ$	$4,731 \cdot 10^{-3}$
$\vartheta^*$	$u$
$\kappa = 35^\circ$	$-0,0056 \text{ mm}$

A (8) összefüggés alapján

$$\begin{aligned}
 C &= (-0,697 - 4,731) \cdot 10^{-3} \cdot (0,76604 + 0,98481) - \\
 &\quad - (-0,697 - 6,339) \cdot 10^{-3} \cdot (0,76604 + 0,86603) = 1,9796 \cdot 10^{-3} \\
 D &= (-0,697 - 4,731) \cdot 10^{-3} \cdot (0,64279 + 0,17365) - \\
 &\quad - (-0,697 - 6,339) \cdot 10^{-3} \cdot (0,64279 - 0,50000) = -3,4270 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$

s így (9):

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{C}{D} = \frac{1,9796 \cdot 10^{-3}}{-3,4270 \cdot 10^{-3}} = -0,57766,$$

ahonnan az első főiránynak a függőlegessel bezárt szöge:

$$\psi \cong -15^\circ$$

A  $\psi$  ismeretében a (10) és (11) képletek felhasználásával az

$$A = -0,697 \cdot 10^{-3} - \frac{(-0,697 - 6,339) \cdot 10^{-3}}{1 - \frac{-0,93969}{0,98481}} = 2,903 \cdot 10^{-3}$$



$$B = \frac{(-0,697 - 6,339) \cdot 10^{-3}}{0,98481 + 0,93969} = -3,656 \cdot 10^{-3}$$

eredmény adódik, s a kvázi *Poisson* szám a következő (16):

$$k = \frac{4 \cdot 2,903 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,903 \cdot 10^{-3} - 3,656 \cdot 10^{-3}} \cong 5,4.$$

A *Poisson*-féle szám a (29) összefüggés alapján:

$$m = \frac{-2 \cdot 0,0056 - 4 \cdot 2,903 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot \frac{5,4 - 2}{5,4} \cdot 0,76604}{-2 \cdot 0,0056 - 2,903 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \left(1 - 3 \cdot \frac{5,4 - 2}{5,4} \cdot 0,76604\right)} \cong 3,9$$

A belső gáznyomásos fajlagos nyúlásmérés adatai:

$$q_0 = 10 \text{ kp/cm}^2$$

$$\varepsilon_{q0} = -0,824 \cdot 10^{-3},$$

s így a rugalmassági modulus (27):

$$E = -\frac{10}{-0,824 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{3,9 + 1}{3,9} = 15\,480 \text{ kp/cm}^2.$$

Az  $A$ ,  $m$ ,  $k$  és  $E$  értékeinek ismeretében a  $p$  főfeszültség nagysága már számítható (28):

$$p = 2,903 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3,9^2}{3,9^2 - 1} \cdot \frac{5,4 - 1}{5,4} \cdot 15\,480 \cong 39,2 \text{ kp/cm}^2.$$

2. Egy sorozatmérés eredményeit tartalmazza a 7. táblázat.

A kiértékelést a (31) egyenletrendszer alapján végeztük elektronikus számológépen.

A sinus és cosinus függvények addíciós tételeinek felhasználásával a (31) egyenletrendszer az alábbi formában írható:

7. táblázat

$\vartheta_i$	$\varepsilon_{\varphi i}$
0°	$-1,019 \cdot 10^{-3}$
45°	$2,128 \cdot 10^{-3}$
90°	$6,620 \cdot 10^{-3}$
120°	$5,230 \cdot 10^{-3}$
160°	$0,304 \cdot 10^{-3}$
230°	$2,810 \cdot 10^{-3}$
300°	$5,302 \cdot 10^{-3}$
$\vartheta_j^*$	$u_j$
0°	0,0156 mm
45°	-0,1010 mm
90°	-0,2698 mm
135°	-0,1529 mm

$$nA + B \cos 2\psi \sum_{i=1}^n \cos 2\vartheta_i - B \sin 2\psi \sum_{i=1}^n \sin 2\vartheta_i - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} = 0 \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} &A \cos 2\psi \sum_{i=1}^n \cos 2\vartheta_i - A \sin 2\psi \sum_{i=1}^n \sin 2\vartheta_i + B \cos^2 2\psi \sum_{i=1}^n \cos^2 2\vartheta_i - \\ &- 2B \cos 2\psi \sin 2\psi \sum_{i=1}^n \cos 2\vartheta_i \sin 2\vartheta_i + B \sin^2 2\psi \sum_{i=1}^n \sin^2 2\vartheta_i - \\ &- \cos 2\psi \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \cos 2\vartheta_i + \sin 2\psi \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \sin 2\vartheta_i \end{aligned} \right\} = 0 \quad (46)$$

$$mA^* + B^* \cos 2\psi \sum_{j=1}^m \cos 2\vartheta_j^* - B^* \sin 2\psi \sum_{j=1}^m \sin 2\vartheta_j^* - \sum_{j=1}^m u_j = 0 \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} &A^* \cos 2\psi \sum_{j=1}^m \cos 2\vartheta_j^* - A^* \sin 2\psi \sum_{j=1}^m \sin 2\vartheta_j^* + B^* \cos^2 2\psi \sum_{j=1}^m \cos^2 2\vartheta_j^* - \\ &- 2B^* \cos 2\psi \sin 2\psi \sum_{j=1}^m \cos 2\vartheta_j^* \sin 2\vartheta_j^* + B^* \sin^2 2\psi \sum_{j=1}^m \sin^2 2\vartheta_j^* - \\ &- \cos 2\psi \sum_{j=1}^m u_j \cos 2\vartheta_j^* + \sin 2\psi \sum_{j=1}^m u_j \sin 2\vartheta_j^* \end{aligned} \right\} = 0 \quad (48)$$



$$\begin{aligned}
 & AB \sin 2\psi \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i + AB \cos 2\psi \sum_{i=1}^n \sin 2\theta_i + \\
 & + B^2 \cos^2 2\psi \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i \sin 2\theta_i + B^2 \cos 2\psi \sin 2\psi \sum_{i=1}^n (\cos^2 2\theta_i - \\
 & - \sin^2 2\theta_i) - B^2 \sin^2 2\psi \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i \sin 2\theta_i - \\
 & - B \sin 2\psi \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \cos 2\theta_i - B \cos 2\psi \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \sin 2\theta_i + \\
 & + A^* B^* \sin 2\psi \sum_{j=1}^m \cos 2\theta_j^* + A^* B^* \cos 2\psi \sum_{j=1}^m \sin 2\theta_j^* + \\
 & + B^{*2} \cos^2 2\psi \sum_{j=1}^m \cos 2\theta_j^* \sin 2\theta_j^* + B^{*2} \cos 2\psi \sin 2\psi \sum_{j=1}^m (\cos^2 2\theta_j^* - \\
 & - \sin^2 2\theta_j^*) - B^{*2} \sin^2 2\psi \sum_{j=1}^m \cos 2\theta_j^* \sin 2\theta_j^* - \\
 & - B^* \sin 2\psi \sum_{j=1}^m u_j \cos 2\theta_j^* - B^* \cos 2\psi \sum_{j=1}^m u_j \sin 2\theta_j^* = 0
 \end{aligned} \tag{49}$$

A (46) egyenletet  $B \cos 2\psi$ -vel, a (48) egyenletet  $B^* \cos 2\psi$ -vel, a (49) egyenletet  $\sin 2\psi$  vel beszorozva és összeadva, valamint a  $\cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi = 1$  azonosságot felhasználva a következő eredmény adódik:

$$\begin{aligned}
 & AB \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i + B^2 \cos 2\psi \sum_{i=1}^n \cos^2 2\theta_i - \\
 & - B^2 \sin 2\psi \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i \sin 2\theta_i - B \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \cos 2\theta_i + \\
 & + A^* B^* \sum_{j=1}^m \cos 2\theta_j^* + B^{*2} \cos 2\psi \sum_{j=1}^m \cos^2 2\theta_j^* - \\
 & - B^{*2} \sin 2\psi \sum_{j=1}^m \cos 2\theta_j^* \sin 2\theta_j^* - B^* \sum_{j=1}^m u_j \cos 2\theta_j^* = 0
 \end{aligned} \tag{50}$$

Vezessük be a

$$\begin{aligned}
 g &\equiv \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i & g^* &\equiv \sum_{j=1}^m \cos 2\theta_j^* \\
 h &\equiv \sum_{i=1}^n \sin 2\theta_i & h^* &\equiv \sum_{j=1}^m \sin 2\theta_j^* \\
 r &\equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} & r^* &\equiv \sum_{j=1}^m u_j
 \end{aligned}$$

$$s \equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \cos 2\vartheta_i$$

$$s^* \equiv \sum_{j=1}^m u_j \cos 2\vartheta_j^*$$

$$t \equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\varphi i} \sin 2\vartheta_i$$

$$t^* \equiv \sum_{j=1}^m u_j \sin 2\vartheta_j^*$$

$$v \equiv \sum_{i=1}^n \cos^2 2\vartheta_i$$

$$v^* \equiv \sum_{j=1}^m \cos^2 2\vartheta_j^*$$

$$w \equiv \sum_{i=1}^n \cos 2\vartheta_i \sin 2\vartheta_i$$

$$w^* \equiv \sum_{j=1}^m \cos 2\vartheta_j^* \sin 2\vartheta_j^*$$

$$z \equiv \sum_{i=1}^n \sin^2 2\vartheta_i$$

$$z^* \equiv \sum_{j=1}^m \sin^2 2\vartheta_j^*$$

jelöléseket és ezek segítségével a (45), (46), (48), (49) és (50) egyenletekből az alábbi egyenletek adódnak:

$$nA + gB \cos 2\psi - hB \sin 2\psi - r = 0 \quad (51)$$

$$gA \cos 2\psi - hA \sin 2\psi + vB \cos^2 2\psi - 2wB \cos 2\psi \sin 2\psi + \\ + zB \sin^2 2\psi - s \cos 2\psi + t \sin 2\psi = 0 \quad (52)$$

$$mA^* - g^*B^* \cos 2\psi - h^*B^* \sin 2\psi - r^* = 0 \quad (53)$$

$$g^*A^* \cos 2\psi - h^*A^* \sin 2\psi + v^*B^* \cos^2 2\psi - 2w^*B^* \cos 2\psi \sin 2\psi + \\ + z^*B^* \sin^2 2\psi - s^* \cos 2\psi + t^* \sin 2\psi = 0 \quad (54)$$

$$gAB + vB^2 \cos 2\psi - wB^2 \sin 2\psi - sB + g^*A^*B^* + \\ + v^*B^{*2} \cos 2\psi - w^*B^{*2} \sin 2\psi - s^*B^* = 0 \quad (55)$$

Az

$$X = \operatorname{tg} 2\psi,$$

$$Y = B \cos 2\psi, \quad Y^* = B^* \cos 2\psi$$

jelölések segítségével — felhasználva, hogy

$$XY = B \sin 2\psi,$$

$$XY^* = B^* \sin 2\psi,$$

az (51)-ből:

$$nA + gY - hXY - r = 0, \quad (56)$$



az (52)-ből  $\frac{1}{\cos 2\psi}$ -vel való végigszorzás után:

$$gA - hAX + vY - 2wXY + zX^2Y - s + tX = 0, \quad (57)$$

az (53)-ból:

$$mA^* + g^*Y^* - h^*XY^* - r^* = 0, \quad (58)$$

az (54)-ből:

$$g^*A^* - h^*A^*X + v^*Y^* - 2w^*XY^* + z^*X^2Y^* - s^* + t^*X = 0, \quad (59)$$

és végül az (55)-ből  $\cos 2\psi$ -vel való végigszorzás után:

$$gAY + vY^2 - wY^2X - sY + g^*A^*Y^* + v^*Y^{*2} - w^*Y^{*2}X - s^*Y^* = 0. \quad (60)$$

egyenletek adódnak.

Az (56) egyenletből  $A$ -t, az (58) egyenletből  $A^*$ -ot kifejezve és az (57), (59), (60) egyenletekbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} & \left( z - \frac{h^2}{n} \right) X^2Y + \left( \frac{2gh}{n} - 2w \right) XY + \left( v - \frac{g^2}{n} \right) Y + \\ & + \left( -\frac{hr}{n} + t \right) X + \left( \frac{gr}{n} - s \right) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left( z^* - \frac{h^{*2}}{m} \right) X^2Y^* + \left( \frac{2g^*h^*}{m} - 2w^* \right) XY^* + \left( v^* - \frac{g^{*2}}{m} \right) Y^* + \\ & + \left( -\frac{h^*r^*}{m} + t^* \right) X + \left( \frac{g^*r^*}{m} - s^* \right) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{gh}{n} - w \right) XY^2 + \left( v - \frac{g^2}{n} \right) Y^2 + \left( \frac{gr}{n} - s \right) Y + \\ & + \left( \frac{g^*h^*}{m} - w^* \right) XY^{*2} + \left( v^* - \frac{g^{*2}}{m} \right) Y^{*2} + \left( \frac{g^*r^*}{m} - s^* \right) Y^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$P \equiv z - \frac{h^2}{n}$$

$$P^* \equiv z^* - \frac{h^{*2}}{m}$$

$$Q \equiv 2 \left( \frac{gh}{n} - w \right)$$

$$Q^* \equiv 2 \left( \frac{g^*h^*}{m} - w^* \right)$$

$$R \equiv v - \frac{g^2}{n}$$

$$R^* \equiv v^* - \frac{g^{*2}}{m}$$

$$S \equiv t - \frac{hr}{n}$$

$$S^* \equiv t^* - \frac{h^*r^*}{m}$$

$$T \equiv \frac{gr}{n} - s$$

$$T^* \equiv \frac{g^*r^*}{m} - s^*$$

Ezek segítségével a (61), (62) és (63) egyenletek helyett a

$$PX^2Y + QXY + RY + SX + T = 0 \quad (64)$$

$$P^*X^2Y^* + Q^*XY^* + R^*Y^* + S^*X + T^* = 0 \quad (65)$$

$$\frac{1}{2} QXY^2 + RY^2 + TY + \frac{1}{2} Q^*XY^{*2} + R^*Y^{*2} + T^*Y^* = 0 \quad (66)$$

egyenletek hozhatók le. A (64) alatti kifejezésből  $Y$ , a (65) alattiból  $Y^*$  kifejezhető:

$$Y = \frac{-SX - T}{PX^2 + QX + R}, \quad (67)$$

$$Y^* = \frac{-S^*X - T^*}{P^*X^2 + Q^*X + R^*}. \quad (68)$$

Ezeket az értékeket a (66) összefüggésbe behelyettesítve egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amely  $X$ -re –  $\operatorname{tg} 2\psi$ -re – megoldható. Az  $A, B, A^*, B^*$  értékeket az  $X$ -nek az egyes egyenletekbe – visszafelé lépésként – történő behelyettesítésével kapjuk meg.

Mivel eredményül két egymástól  $90^\circ$ -ban különböző  $\psi$  értéket kapunk, a számítás két  $B, B^*$  értéket is szolgáltat, amelyek közül a tényleges  $\psi$ -hez tartozót tartjuk meg.

A leírt számítást a numerikus példára elvégezve, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \psi &\cong 5^\circ \\ A &= 2,803 \cdot 10^{-3} \\ B &= -3,881 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$



$$A^* = -0,12698 \text{ mm}$$

$$B^* = 0,14501 \text{ mm}$$

Ezek felhasználásával  $R = 60 \text{ mm}$

$$k = \frac{4 \cdot 2,803 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,803 \cdot 10^{-3} - 3,881 \cdot 10^{-3}} \cong 6,5, \quad (16')$$

$$m = \frac{-2 \cdot 0,12698}{2,803 \cdot 10^{-3} \cdot 60 - 2 \cdot 0,12698} \cong 3. \quad (25')$$

Az  $E$  értéke laboratóriumi nyomókísérlet alapján:

$$E_{\text{labor}} = 19\,200 \text{ kp/cm}^2,$$

s így a (24a, b, c) egyenletekből

$$p \cong 51,4 \text{ kp/cm}^2,$$

s a (24d) egyenletből:

$$\begin{aligned} p &= \frac{B^*}{R} \cdot \frac{2mE}{m+1} \cdot \frac{k-1}{k-2} \cdot \frac{m}{3m-4} = \\ &= \frac{0,14501}{60} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 19\,200}{3+1} \cdot \frac{6,5-1}{6,5-2} \cdot \frac{3}{3 \cdot 3-4} = 51 \text{ kp/cm}^2. \end{aligned}$$

(Látható, hogy a két  $p$  érték jól egyezik.)

A sztochasztikus kiértékelésnek a könyvünkben ismertetett módja, amely az  $A$ ,  $B$ ,  $A^*$ ,  $B^*$  állandók meghatározása útján adja meg a primer paraméterek értékeit, *közelítő jellegű*, ui. nem veszi figyelembe, hogy a (24) alatti egyenletek lineárisan összefüggők.

Ha a (24c) és (24d) egyenletekből kifejezzük a  $p$ -t és egyenlővé tesszük egymással, akkor az

$$\frac{A^*}{k} + \frac{B^*}{k-1} \cdot \frac{m}{3m-4} = 0,$$

egyenletet kapjuk, amely a  $k$  és  $m$  (16) illetve (25) képletének felhasználásával a következő alakba írható:

$$\begin{aligned}\hat{Q} \equiv & 12AA^{*2} - 4AA^*R - 8A^{*2} + 2A^*B^* - 6A^{*2}B + \\ & + 8A^3R + 4A^2BR + 16A^2A^* + 8AA^*B = 0\end{aligned}$$

s a szigorú kiértékelést a *Lagrange*-féle multiplikátorok  $[\rho]$  felhasználásával az

$$\begin{aligned}\hat{S} = \hat{S}(A, B, A^*, B^*, \psi, \varrho) \equiv & \sum_{i=1}^m [A + B \cos 2(\psi + \vartheta_i) - \varepsilon_{\varphi i}]^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m [A^* + B^* \cos 2(\psi + \vartheta_j^*) - u_j]^2 + \\ & + \varrho \hat{Q} = \text{Min}\end{aligned}\quad (69)$$

feltétel alapján a

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \hat{S}}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial \hat{S}}{\partial A^*} = 0, \quad \frac{\partial \hat{S}}{\partial B^*} = 0, \quad \frac{\partial \hat{S}}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \hat{S}}{\partial \varrho} = 0$$

egyenletekből végezhetjük. Ezen egyenletek megoldásán alapuló szigorú módszer azonban az ismertetett közelítő eljárásnál jóval bonyolultabb, így csupán elektronikus számológéppel történő számítás esetén alkalmazható, ellenben a gyakorlati pontossági követelményeket a közelítő módszer is kielégíti.



## IRODALOM

- [1] Asszonyi Cs.: Primér feszültségi és alakváltozási mező jellemző mutatószámainak in-situ mérésekkel történő meghatározása. *Bányászati Lapok* 10 (1966). p: 649–660.
- [2] Asszonyi Cs.: Determination by in-situ Measurements of the Characteristic Parameters of the Field of Primary Stresses and Deformations. *Publications of Technical University for Heavy Industry* 31 (1970). p: 39–60.
- [3] Asszonyi Cs.: Vágatbiztosítások tervezése. *Műszaki Élet Tatabányán* 3 (1967). p: 1–29.
- [4] Asszonyi Cs.: Kőzetek fizikai egyenletének és reológiai anyagállandóinak laboratóriumi meghatározása. Kutatási zárójelentés. *Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc* (1972). p: 1–52.
- [5] Asszonyi Cs.: Kőzetkontinuumok reológiai elméletéről. *Akadémiai doktori értekezés*. Tatabánya (1975). p: 1–68.
- [6] Asszonyi Cs. – Csorba L. – Huszár I. – Müller Z. – Kapolyi L. – Richter R.: Kőzetállandók laboratóriumi meghatározása relaxációs vizsgálattal. *Tatabányai Szénbányák Műszaki Közgazdasági Közleményei* 4 (1974). p: 163–169.
- [7] Asszonyi Cs. – Huszár I. – Kapolyi L.: Kőzetállandók laboratóriumi meghatározása kúszásvizsgálattal. *Tatabányai Szénbányák Műszaki Közgazdasági Közleményei* 4 (1971). p: 177–182.
- [8] Asszonyi Cs. – Balásy Z. – Huszár I. – Kapolyi L.: Kőzetjellemzők laboratóriumi meghatározása triaxiális vizsgálattal. *Bányászati és Kohászati Lapok – Bányászat* (1975) ..., Megjelenés alatt.
- [9] Asszonyi Cs. – Kapolyi L.: Feszültségeloszlás az időtényező figyelembevételével. *Műszaki Élet Tatabányán* 4 (1967). p: 1–17.
- [10] Asszonyi Cs. – Kapolyi L.: Über einen Spezialfall der Zusammenarbeit von Gestein und Ausbau. *Proceedings 3rd Budapest Conference on Soil and Foundation Engineering*. Akadémiai Kiadó, Budapest (1968). p: 5–20.
- [11] Asszonyi Cs. – Kapolyi L.: Körszelvényű bányatérsek körüli me-



- chanikai mező reológiai vizsgálata. *Bányászati Kutató Intézet Közleményei* 1 (különszám) (1970). p: 3–65.
- [12] Asszonyi Cs. – Kapolyi L. – Richter R.: Kőzetek mechanikai jellemzőinek laboratóriumi meghatározása. *Tatabányai Szénbányák Műszaki Közgazdasági Közleményei* 1 (1972) p: 16–23.
- [13] Filcek, H.: Laboratoryjna próba sciskania a reológiczne własności skal. *Przegląd Naukowo – Techniczny AGH, Seria G/1* (1959).
- [14] Kapolyi L.: Bányabiztosítószerkezetek optikai feszültségvizsgálata. *Kandidátusi értekezés*. Tatabánya (1966).
- [15] Kapolyi L.: Bányabeli kőzetmechanikai mérések a tatabányai szénmedencében. *Műszaki Élet Tatabányán* 5 (1964). p: 1–30.
- [16] Kapolyi L.: Tatabányai szénmedencében végzett kőzetmechanikai mérések továbbfejlesztési irányai. *Műszaki Élet Tatabányán* 2 (1966). p: 101–125.
- [17] Kapolyi L.: A végtelen féltér fizikai állapotfüggvénye. *Műszaki Élet Tatabányán* 3 (1966). p: 93–105.
- [18] Kapolyi L.: Some Problems on the Rock Mechanics of Future Underground Mining. *Sessa Spring Meeting Los Angeles, California* (1973).
- [19] Kleczek, Z.: Doswiadczenie kryterium doboru modelm reologiczne go dla skal. *Prace komisji Nauk Technicznych, Górnictwo* 5 (1967).
- [20] Huszár I.: A szilárdságtan felépítése és módszerei. *Mérnöki Továbbképző Intézet, 1007* Budapest (1953).
- [21] Huszár I.: Szilárdsági és reológiai vizsgálatok a nagyegyházi medencében lemélyített kutatófúrások egyes kijelölt magmintáinak anyagán. *Kutatási jelentés, Gödöllő* (1975). p: 1–259.
- [22] Richter R.: Measurements of rock-pressure in-situ in elastic rocks. *Publication of the Technical University for Heavy Industry* 21 Miskolc (1960). p: 25–27.
- [23] Richter R.: Über die Bestimmung von in-situ Charakter des Gebirges. *Felsmechanik und Ingenieur-geologie*, Springer (1964). p: 178–181.
- [24] Richter R.: Kőzetkarakterek in-situ meghatározásáról. *Műszaki Élet Tatabányán* 4 (1966). p: 1–11.



## DETERMINATION OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF ROCKS

To the planning of support, the forming of support equipments, the proper working out of their settling technology it is strictly necessary to know the physico-mechanical properties of the rock environment. The book wishes to give a summary of the most important results relative to the performed prospectings in the coal basin of Tata-bánya during a period of one decade and a half and it makes known the determination methods of the characteristic parameters of primary state and of the material constants.

The first chapter describes the primary state and demonstrates that commonly it has not a vertical-horizontal orientation, but it could be characterized as a general situated spatial state.

The second chapter shows the determination of the material law of rocks and analyses the material properties.

The laboratory investigation of the rock constants with creep test is demonstrated in the third chapter. It makes us acquainted with the experimental equipments, the principle of measurements and its realization and the way of interpretation.

The fourth chapter deals with the most favourable laboratory test plans and a method is displayed to the determination of the material constants by using of so called asymptotic rock properties.

The fifth chapter makes us acquainted with the equipments of relaxation experiments, their principle and the results of the performed tests.

The chapter sixth treats of the laboratory triaxial experiments and the breaking tests.

The determination of in-situ value of the rock characteristics is based on the measurements of tangential elongation and radial displacement effectuated in the bore-holes accordingly. The seventh chapter makes known the basic relations of the stress, displacement and deforming state developed round the bore-hole.

The in-situ measurement methods and the evaluation of the obtained test data forms the subject of the last chapter.





